Colles

semaine 6 : 02 octobre - 07 octobre

I. Structure vectorielle

I.1. Notion de loi de composition / d'espace vectoriel

1) Loi de composition interne, loi de composition externe

Soit E un ensemble non vide.

- Une **loi de composition interne** $\top$ sur l'ensemble E est une application $\top : E \times E \to E$. Ainsi : $\forall (x,y) \in E^2,\ x \top y \in E$.
- Une **loi de composition externe** $*$ sur l'ensemble E est une application $* : \mathbb{K} \times E \to E$. Ainsi : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E,\ \lambda * x \in E$.

2) Espace vectoriel

Un ensemble non vide E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel) si :

1) E est muni d'une loi de composition interne notée $+ : E \times E \to E$ qui vérifie les propriétés suivantes.

a) $\forall (x,y) \in E^2,\ x + y = y + x$ *(commutativité)*

b) $\forall (x,y,z) \in E^3,\ x + (y+z) = (x+y) + z$ *(associativité)*

c) $\exists\ 0_E \in E,\ \forall x \in E,\ x + 0_E = 0_E + x = x$ *(élément neutre)*

d) $\forall x \in E, \exists y \in E,\ x + y = y + x = 0_E$ *(y opposé de x)*

2) E est muni d'une loi de composition externe notée $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ qui vérifie les propriétés suivantes.

a) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x,y) \in E^2,\ \lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
(la loi $\cdot$ est distributive à gauche par rapport à la loi $+$ de E)

b) $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E,\ (\lambda+\mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
(la loi $\cdot$ est distributive à droite par rapport à « la » loi $+$)

c) $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E,\ (\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$
(associativité mixte)

d) $\forall x \in E,\ 1 \cdot x = x$

Vocabulaire :

× les éléments de E sont appelés **vecteurs**.

× on parle parfois de **multiplication par un scalaire** pour désigner la loi $\cdot$
(les réels λ participant à la multiplication externe sont appelés des **scalaires***)*

Espaces vectoriels de référence :

$\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(D,\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sont des espaces vectoriels.

On retiendra que les lois $+$ et $\cdot$ vérifient les propriétés qui permettent les manipulations algébriques raisonnables des vecteurs.

I.2. Combinaison linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $m \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(u_1, \dots, u_m)$ une **famille** de vecteurs de E.

- Un vecteur $v \in E$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $u_1, \dots, u_m$ s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m$ tel que :

$$\boxed{v = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_m \cdot u_m}$$

II. Sous-espaces vectoriels

II.1. Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni des lois $+$ et $\cdot$

- Une partie <u>non vide</u> F de E est un **sous-espace vectoriel** de E si :

  a) $\forall (x, y) \in F^2,\ x + y \in F$ *(F est stable pour la loi $+$)*

  b) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F,\ \lambda \cdot x \in F$ *(F est stable pour la loi $\cdot$)*

  (F est stable par combinaison linéaire d'éléments de F)
- On pourra utiliser la caractérisation suivante.

$$\begin{array}{ll} & F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \\ \Leftrightarrow & \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x, y) \in F^2,\ \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F \\ \Leftrightarrow & \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x, y) \in F^2,\ \lambda \cdot x + y \in F \\ \Leftrightarrow & \forall \mu \in \mathbb{K},\ \forall (x, y) \in F^2,\ x + \mu \cdot y \in F \end{array}$$

(on évitera d'utiliser les deux dernières caractérisations : elles introduisent une dissymétrie des rôles de x et y qui n'a pas lieu d'être)

Propriété

- Un sev F de E est non vide. En particulier, il contient toujours 0_E.
- La contraposée de cet énoncé peut permettre de démontrer que F n'est pas un sev de E.

$$\boxed{0_E \notin F \ \Rightarrow\ F \text{ n'est pas un sev de } E}$$

II.2. Démontrer qu'un ensemble F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

$$\boxed{F \text{ sous-espace vectoriel de } E \quad \Rightarrow \quad F \text{ est un espace vectoriel}}$$

MÉTHODO **Démontrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel**

Afin de montrer que F est un espace vectoriel, il existe plusieurs possibilités.

1) Vérifier tous les axiomes d'espace vectoriel.
(en pratique, on ne le fait jamais - on estime que cela a été fait pour les ev de référence)

2) Démontrer que F est un sous-espace vectorie d'un $\mathbb{K}$-espace vectorier E de référence.

> Démontrons que F est un sous-espace vectoriel de E.
>
> ***(i)*** $F \subseteq E$
>
> ***(ii)*** $F \neq \varnothing$. En effet, $0_E \in F$ car ...
> *(si ce n'est pas le cas, F n'est pas un sev de E !)*
>
> ***(iii)*** Démontrons que F est stable par combinaisons linéaires.
> Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
> Soit $(u, v) \in F^2$.
> Il s'agit de démontrer : $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.
> Tout d'abord : $\lambda \cdot u + \mu \cdot v =$ ...
> *(on réalise la somme des vecteurs $\lambda \cdot u$ et $\mu \cdot v$ à l'aide de la loi + définie sur E)*
> Or : ...
> *(on vérifie que $\lambda \cdot u + \mu \cdot v$ vérifie la propriété définissant F)*
> Et ainsi $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.

Le point (iii) peut être démontré en deux temps : (iii) stabilité de F par la loi $+$
et (iv) stabilité de F par la loi $\cdot$

> ***(iii)*** Démontrons que F est stable par la loi $+$.
> Soit $(u, v) \in F^2$.
> Il s'agit de démontrer : $u + v \in F$.
> Tout d'abord : $u + v = \ldots$
> *(on réalise la somme des vecteurs u et v à l'aide de la loi + définie sur E)*
> Or : $\ldots$ *(on vérifie que $u + v$ vérifie la propriété définissant F)*
> Et ainsi $u + v \in F$.
>
> ***(iv)*** Démontrons que F est stable par la loi $\cdot$
> Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et soit $u \in F$.
> Il s'agit de démontrer : $\lambda \cdot u \in F$.
> Tout d'abord : $\lambda \cdot u = \ldots$
> Or : $\ldots$ *(on vérifie que $\lambda \cdot u$ vérifie la propriété définissant F)*
> Et ainsi $\lambda \cdot u \in F$.

Remarque
Dans la rédaction, il est (très) souvent utile de rappeler que u et v sont des éléments de E qui vérifient la propriété d'appartenance à F :

> - Comme $u \in F$, u s'écrit ... et vérifie ...
>   *(l'appartenance de u à E lui confère une écriture particulière*
>   *l'appartenance de u à F fait que u vérifie les propriétés définissant F)*
> - Comme $v \in F$, v s'écrit ... et vérifie ...

3) Montrer que F s'écrit sous la forme $F = \text{Vect}\,(\mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ est une famille finie d'éléments de E.

C'est une méthode à préconiser dès que possible. Elle présente l'avantage d'exhiber une famille $\mathcal{F}$ génératrice de F. Si de plus $\mathcal{F}$ est une famille libre, alors $\mathcal{F}$ une base de F.

Le colleur pourra demander que soit présentée la 2ème ou 3ème méthode.

Illustration sur des exemples

Voici le type d'exercices qu'il faut savoir résoudre à l'aide des 2 méthodes précédentes.

1) Montrer que $F = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0\}$ est un ev.

2) Montrer que l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un ev.

3) Montrer que $F = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\}$ est un ev.

4) Montrer que $F = \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \mid \forall x \in \mathbb{K},\ f'(x) = f(x)\}$ est un ev.

5) Montrer que $F = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(0) = 2P(1)\}$ est un ev.

Pour les questions ***1)*** et ***2)*** on exhibera en priorité une famille génératrice de F ($F = \text{Vect}\,(\mathcal{F})$). Pour ***3)***, ***4)*** et ***5)*** on privilégiera la méthode consistant à démontrer que F est un sous-ensemble non vide, stable par combinaisons linéaires, d'un ev de référence.

Exemple

Traitons les questions ***1)*** et ***3)*** afin de mettre en avant la rédaction attendue.

1) Démontrons que $F = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(i) $F \subseteq \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(ii) $F \neq \varnothing$. En effet, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$ puisque : $3 \times 0 + 2 \times 0 - 0 = 0$.

(iii) Démontrons que F est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
Soit $(X, Y) \in F^2$.
Il s'agit de démontrer : $\lambda \cdot X + \mu \cdot Y \in F$.

- Comme $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, il existe $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{K}^3$ tel que $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$.

  Comme $X \in F$, alors : $3x_1 + 2y_1 - z_1 = 0$.
- Comme $Y \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, il existe $(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{K}^3$ tel que $Y = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

  Comme $Y \in F$, alors : $3x_2 + 2y_2 - z_2 = 0$.

Tout d'abord : $\lambda \cdot X + \mu \cdot Y = \begin{pmatrix} \lambda\, x_1 + \mu\, x_2 \\ \lambda\, y_1 + \mu\, y_2 \\ \lambda\, z_1 + \mu\, z_2 \end{pmatrix}$.

Or :

$$\begin{aligned} & 3\ (\lambda x_1 + \mu x_2) + 2\ (\lambda y_1 + \mu y_2) - (\lambda z_1 + \mu z_2) \\ = \ & 3\,\lambda x_1 + 2\,\lambda y_1 - \lambda z_1 + 3\,\mu x_2 + 2\,\mu y_2 - \mu z_2 \\ = \ & \lambda\ (3\,x_1 + 2\,y_1 - z_1) + \mu\ (3\,x_2 + 2\,y_2 - z_2) \\ = \ & 0 \end{aligned}$$

Et ainsi, $\lambda \cdot X + \mu \cdot Y \in F$.

En réalité, pour ce type d'exemple, il est préférable d'utiliser la méthode ***2)*** (la méthode ***1)*** est donnée au-dessus à titre d'illustration.

1) Démontrons que $F = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0\}$ est un ev.

$$\begin{array}{rcl} F & = & \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0\} \\ & = & \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z = 3x + 2y\} \\ & = & \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3x+2y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (x,y) \in \mathbb{K}^2\} \\ & = & \{x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{K}^2\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

Ainsi F est un espace vectoriel et $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de F (c'est le cas puisque $F = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$).

3) Démontrons que $F = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

(i) $F \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ par définition.

(ii) $F \neq \varnothing$. En effet, la suite constante nulle est élément de F.

(iii) Démontrons que F est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
Soit $(u, v) \in F^2$.
Il s'agit de démontrer : $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.

- Comme $u \in F$, u est une suite (u_n) qui vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.
  En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\lambda\ u_{n+2} = \lambda\ u_{n+1} + 2\lambda\ u_n$.
- Comme $v \in F$, v est une suite (v_n) qui vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n$.
  En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mu\ v_{n+2} = \mu\ v_{n+1} + 2\mu\ v_n$.

Tout d'abord : $\lambda \cdot u + \mu \cdot v = \big(\lambda\ u_n + \mu\ v_n\big)_{n \in \mathbb{N}}$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{rcl} \lambda\ u_{n+2} + \mu\ v_{n+2} & = & \lambda\,(u_{n+1} + 2u_n) + \mu\,(v_{n+1} + 2v_n) \\ & = & (\lambda\ u_{n+1} + 2\lambda\ u_n) + (\mu\ v_{n+1} + 2\mu\ v_n) \\ & = & (\lambda\ u_{n+1} + \mu\ v_{n+1}) + 2\ (\lambda\ u_n + \mu\ v_n) \\ & = & w_{n+1} + w_n \end{array}$$

Et ainsi $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.

II.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

1) Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit A une partie non vide de E ($A \subseteq E$).

- On appelle **sous-espace vectoriel engendré par** A et on note $\text{Vect}(A)$ l'ensemble des vecteurs de E qui s'écrivent comme combinaison linéaire (finie) d'éléments de A. Autrement dit :

$$\boxed{\text{Vect}(A) = \{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot a_i \mid p \in \mathbb{N}^*, (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, (a_1, \dots, a_p) \in A^p\}}$$

- En particulier, si $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ (*i.e.* A fini), on a :

$$\boxed{\text{Vect}(A) = \text{Vect}(\ a_1, \dots, a_m) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot a_i \quad | \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m \right\}}$$

(on note $\text{Vect}(a_1, \dots, a_m)$ *en lieu et place de* $\text{Vect}(\{a_1, \dots, a_m\})$*)*

Illustration dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

1) $E = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$ est l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme :

$$a \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$$

pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$. Ainsi $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2) $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$ est l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme :

$$a \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}$$

pour $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. Ainsi F est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3) $H = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$ est l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme :

$$a \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & 0\\0 & a\end{pmatrix}$$

pour $a \in \mathbb{K}$. Ainsi $H = \{a \cdot I_2 \mid a \in \mathbb{K}\}$ est l'ensemble des matrices scalaires.

4) $K = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\right)$ est l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme :

$$a \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & c\\c & b\end{pmatrix}$$

pour $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$. Ainsi K est l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2) **Propriétés de manipulations** *(démo non exigible)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $(a, b, c) \in E^3$.

1) $\boxed{\mathrm{Vect}\,(a, 0_E) = \mathrm{Vect}\,(a)}$

(de manière générale, on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie en ajoutant 0_E à cette partie)

2) $\boxed{\mathrm{Vect}\,(a, b) = \mathrm{Vect}\,(b, a)}$

(de manière générale, on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie en modifiant l'ordre des termes de la partie)

3) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$: $\boxed{\mathrm{Vect}\,(\lambda \cdot a, b) = \mathrm{Vect}\,(a, b)}$

(de manière générale, on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie par multiplication par un scalaire non nul d'un élément de cette partie)

4) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$: $\boxed{\mathrm{Vect}\,(a, b, \lambda \cdot a + \mu \cdot b) = \mathrm{Vect}\,(a, b)}$

(de manière générale, on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie en ajoutant à cette partie un vecteur qui apparaît comme CL d'éléments de cette partie.)

5) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$: $\boxed{\mathrm{Vect}\,(a, b, c + (\lambda \cdot a + \mu \cdot b)) = \mathrm{Vect}\,(a, b, c)}$

(de manière générale, on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie en ajoutant à un vecteur de cette partie une CL des autres vecteurs de cette partie.)

Il faut savoir généraliser ces propriétés dans le cas où la partie contient un nombre fini quelconque d'éléments (« de manière générale » ...).

Exemple

Il faut savoir procéder à des « simplifications » d'une partie A d'un espace vectoriel engendré par A à l'aide de ces propriétés. Par exemple (comprendre chaque étape !) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \mathscr{M}_{31}(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

Il faut lire correctement ces propriétés.
Il ne s'agit `EN AUCUN CAS` de « découper un vecteur ». Plus précisément :

$$\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \cancel{=} \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Comme vu précédemment, on peut ajouter à un vecteur de la partie A une CL de vecteurs de A sans que cela ne modifie $\operatorname{Vect}(A)$. La famille A étant réduite à un vecteur, l'ajout d'une CL d'éléments de A se traduit par exemple par :

$$\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}\right)$$

3) Propriétés théoriques

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit A une partie <u>non vide</u> de E.

1) $0_E \in \operatorname{Vect}(A)$.

2) $A \subseteq \operatorname{Vect}(A)$.

3) $A \subseteq B \ \Rightarrow\ \operatorname{Vect}(A) \subseteq \operatorname{Vect}(B)$.

4) $\operatorname{Vect}(A)$ est un espace vectoriel.

$\operatorname{Vect}(A)$ est même le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A :

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ F \text{ sous-espace vectoriel de } E\\ \bullet\ F \supseteq A\end{array}\right\} \Rightarrow \ F \supseteq \operatorname{Vect}(A)$$

5) A est un ev $\Leftrightarrow A = \operatorname{Vect}(A)$.

6) On a notamment : $\operatorname{Vect}(\operatorname{Vect}(A)) = \operatorname{Vect}(A)$.

On peut retenir l'explication informelle suivante (qui fait écho au point *4)*).

Lorsqu'on considère l'espace vectoriel engendré par une **partie** A de E, on suppose seulement que A est **une partie non vide de E**. **En aucun cas on ne suppose que A est un espace vectoriel**.
L'ensemble $\operatorname{Vect}(A)$ est le « vectorialisé » de A. Pour créer $\operatorname{Vect}(A)$, l'idée est de partir de l'ensemble A et d'y ajouter tous les éléments permettant d'obtenir une structure vectorielle :

× pour tout $a \in A$, on ajoute tous les $\lambda \cdot a$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$,

× on ajoute alors toutes les sommes finies d'éléments du nouvel ensemble créé.

En résumé, partant de A, on ajoute toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A. On obtient ainsi un espace vectoriel : c'est $\operatorname{Vect}(A)$.

III. Familles génératrices, libres, bases

III.1. Familles génératrices d'un espace vectoriel E

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E.

- La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est dite **génératrice** de E si :

$$E = \text{Vect}\,(e_1, \dots, e_p)$$

  Autrement dit, si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteurs de la famille $(e_1, \dots, e_p)$.

  La famille $(e_1, \dots, e_p)$ engendre E $\Leftrightarrow$ $\forall x \in E,\ \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ x = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot e_i$

- Lorsque $E = \text{Vect}\,(e_1, \dots, e_p)$, on dit que la famille $(e_1, \dots, e_p)$ engendre E.
- **Propriété :**

  Soit $v \in E$.

  La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice de E $\Rightarrow$ La famille $(e_1, \dots, e_p, v)$ est génératrice de E

  De manière générale, toute famille qui contient une famille génératrice de E est une famille génératrice de E.

Lorsqu'on parle d'une famille génératrice d'un espace vectoriel E, il faut systématiquement préciser l'ensemble E engendré sans quoi ce qui est écrit n'a pas de sens.

$\hookrightarrow$ Toute famille est génératrice.
En effet, une famille $\mathcal{F}$ est toujours génératrice … de l'espace qu'elle engendre !
Autrement dit, $\mathcal{F}$ est toujours génératrice de $\text{Vect}\,(\mathcal{F})$ (espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$).
Mais cette information n'a que peu d'intérêt.

III.2. Familles libres d'un espace vectoriel

III.2.a) Relation de dépendance linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $m \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(u_1, \dots, u_m)$ une **famille** de vecteurs de E.

- On dit qu'il existe une **relation de dépendance linéaire** entre $(u_1, \dots, u_m)$ s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m$ tel que :

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \dots + \lambda_m \cdot u_m = 0_E$$

- Cette relation est dite **triviale** si tous les scalaires λ_1, …, λ_m sont nuls.

III.2.b) Notion de famille libre

Soit E un espace vectoriel et soit $m \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(e_1, \dots, e_m)$ une famille de vecteurs de E.

- La famille $(e_1, \dots, e_m)$ est dite **libre** si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^n, \quad \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot e_i = 0_E \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0 \right)$$

- On dit alors que les vecteurs $(e_1, \dots, e_m)$ sont **linéairement indépendants** : la seule relation de dépendance linéaire entre les e_i est la relation triviale.
- Une famille non libre est dite **liée**.
  Cela signifie qu'il existe une relation de dépendance linéaire non triviale entre les vecteurs de la famille $(e_1, \dots, e_m)$.
  Ainsi, la famille $(e_1, \dots, e_m)$ est dite **liée** (dans E) si :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i = 0_E \right) \quad \texttt{ET} \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq (0, \cdots, 0)$$

- **Propriétés :**
  Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soient e_1, ..., e_m, e_{m+1}, u des vecteurs de E.

a)	La famille $(e_1, \dots, e_m)$ est liée	$\Leftrightarrow$	L'un des vecteurs de la famille s'exprime comme CL des autres vecteurs de la famille
b)	• $(e_1, \dots, e_m)$ libre • $(e_1, \dots, e_m, u)$ lié	$\Rightarrow$	Le vecteur u s'exprime comme CL des vecteurs de la famille $(e_1, \dots, e_m)$
c)	• $(e_1, \dots, e_m)$ libre • Le vecteur e_{m+1} ne s'exprime pas comme CL des vecteurs de $(e_1, \dots, e_m)$	$\Rightarrow$	La famille $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1})$ est libre
d)	Toute sous-famille d'une famille libre est elle-même une famille libre.		

- **Intérêt des familles libres :**

  Si un vecteur $u \in E$ s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs d'une famille libre $(e_1, \dots, e_m)$ alors cette combinaison linéaire est unique.

`MÉTHODO` **Démontrer qu'une famille finie $\mathcal{F}$ est une famille libre d'un espace vectoriel E**

1) Une famille (u) constituée uniquement d'un vecteur **non nul** de E est libre.
(la famille (0_E) est par contre liée et plus généralement, toute famille contenant 0_E est liée)

2) Une famille (u, v) constituée uniquement de deux vecteurs de E est libre si et seulement si ces deux vecteurs sont non colinéaires.

Pour démontrer la liberté d'une famille contenant trois vecteurs ou plus, on revient à la définition. Illustrons ce dernier cas.

- Démontrons que la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \right)$ est libre.

  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$.

  Supposons : $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. $(*)$

$$\text{Or :} \quad (*) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_3}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right.$$

(par remontées successives)

  La famille $\mathcal{F}$ est donc libre.

- Démontrons que la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} \right)$ est liée.

  Cherchons $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que :

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad (*)$$

$$\text{Or :} \quad (*) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & \lambda_3 \\ \lambda_2 & = & -2\lambda_3 \end{array} \right.$$

  Ce système homogène à 3 équations et 3 inconnues n'est pas de Cramer.
  Cela signifie qu'il admet d'autres solutions que $(0, 0, 0)$.
  En choisissant par exemple $\lambda_3 = 1$, on obtient une relation de dépendance linéaire non triviale entre les trois vecteurs considérés.

$$1 \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

  La famille $\mathcal{F}$ est donc liée.

Exemple *(Démontrer qu'une famille de polynômes est libre)*
Notons (Q_0, Q_1, Q_2) la famille de polynômes définie par :

$$Q_0(X) = (X-1)(X-3), \quad Q_1(X) = (X-1)(X-2) \quad \text{et} \quad Q_2(X) = (X-2)(X-3)$$

- $1^{\text{ère}}$ méthode *(fonctionne indépendamment de la forme des polynômes)*
  Démontrons que la famille (Q_0, Q_1, Q_2) est libre.
  Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$.
  Supposons : $\lambda_0 \cdot Q_0 + \lambda_1 \cdot Q_1 + \lambda_2 \cdot Q_2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ $(*)$.

$$\begin{aligned}
\text{Or : } (*) \quad & \iff \quad \lambda_0\,(X-1)(X-3) + \lambda_1\,(X-1)(X-2) + \lambda_2\,(X-2)(X-3) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\
& \iff \quad \lambda_0\left(X^2 - 4X + 3\right) + \lambda_1\left(X^2 - 3X + 2\right) + \lambda_2\left(X^2 - 5X + 6\right) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\
& \iff \quad (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)\ X^2 + (-4\,\lambda_0 - 3\,\lambda_1 - 5\lambda_2)\ X + (3\,\lambda_0 + 2\,\lambda_1 + 6\,\lambda_2) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\
& \iff \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_0 & + & \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 0 \\ -4\,\lambda_0 & - & 3\,\lambda_1 & - & 5\,\lambda_2 & = & 0 \\ 3\,\lambda_0 & + & 2\,\lambda_1 & + & 6\,\lambda_2 & = & 0 \end{array}\right. \\
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 4\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3\,L_1}}{\iff} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_0 & + & \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 0 \\ & & \lambda_1 & - & \lambda_2 & = & 0 \\ & - & \lambda_1 & + & 3\,\lambda_2 & = & 0 \end{array}\right. \\
& \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_0 & + & \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 0 \\ & & \lambda_1 & - & \lambda_2 & = & 0 \\ & & & & 2\,\lambda_2 & = & 0 \end{array}\right. \\
& \iff \quad \{\ \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \\
& \qquad\quad \textit{(par remontées successives)}
\end{aligned}$$

  On en conclut que la famille (Q_0, Q_1, Q_2) est libre.

- $2^{\text{ème}}$ méthode *(qui exploite la forme des polynômes de la famille concernée)*
  Démontrons que la famille (Q_0, Q_1, Q_2) est libre.
  Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$.
  Supposons : $\lambda_0 \cdot Q_0 + \lambda_1 \cdot Q_1 + \lambda_2 \cdot Q_2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ $(*)$.

$$\begin{aligned}
\text{Or : } (*) \quad & \iff \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_0\,Q_0(x) + \lambda_1\,Q_1(x) + \lambda_2\,Q_2(x) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}(x) \\
& \iff \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_0\,(x-1)(x-3) + \lambda_1\,(x-1)(x-2) + \lambda_2\,(x-2)(x-3) = 0
\end{aligned}$$

  Cette dernière propriété est notamment vérifiée :
  × en $x = 1$. On en conclut : $2\,\lambda_2 = 0$ et ainsi : $\lambda_2 = 0$.
  × en $x = 2$. On en conclut : $-\,\lambda_0 = 0$ et ainsi : $\lambda_0 = 0$.
  × en $x = 3$. On en conclut : $2\,\lambda_1 = 0$ et ainsi : $\lambda_1 = 0$.
  Finalement : $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
  On en conclut que la famille (Q_0, Q_1, Q_2) est libre.

Quelle est la bonne méthode ?

- Comme première réponse, on peut mettre en avant que la bonne méthode est celle que l'on maîtrise. Attention cependant : il est évident qu'il est nécessaire de connaître la méthode la plus générale car une méthode particulière, par définition, ne peut être utilisée dans tous les cas.

- La $1^{\text{ère}}$ méthode exposée ici exploite le fait que le seul polynôme nul ... est le polynôme nul !
  Le polynôme nul est celui dont tous les coefficients sont nuls. Comme $(*)$ stipule que le polynôme $\lambda_0 \cdot Q_0 + \lambda_1 \cdot Q_1 + \lambda_2 \cdot Q_2$ est nul, on peut en conclure que ses coeffcients sont nuls. Obtenir ses coefficients, c'est décomposer ce polynôme suivant la base canonique $(1, X, X^2)$. C'est ce qui est présenté en $3^{\text{ème}}$ équivalence et qui permet d'obtenir le système présent en $4^{\text{ème}}$ équivalence.
- La $2^{\text{ème}}$ méthode exploite le lien entre polynôme et fonction polynomiale. En particulier, un polynôme est nul si la fonction polynomiale associée est nulle en tout point (c'est la première équivalence de la $2^{\text{ème}}$ méthode). Si une fonction est nulle en tout point alors, en l'évaluant en certains points, on obtient des propriétés que l'on peut exploiter.

Il est à noter que la propriété de liberté d'une famille se présente, après la quantification, sous forme d'une implication : $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m, \quad \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot e_i = 0_E \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0 \right)$.
Il est donc possible de raisonner par implication pour démontrer que le m-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ est nul.
On peut cependant faire les remarques suivantes :

× un système linéaire se résout toujours par équivalence (on applique l'algorithme du pivot de Gauss).

× il est classique de raisonner par implication pour la liberté d'une famille de fonctions. C'est d'ailleurs ce qu'on fait dans la $2^{\text{ème}}$ méthode : si la fonction est identiquement nulle alors, en particulier, elle est nulle aux points 1, 2 et 3.

× en réalité, l'implication réciproque est toujours vérifiée. En effet, si le m-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ est nul alors on a évidemment $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot e_i = 0_E$. Ainsi, si on parvient à démontrer que le m-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ est nul, alors on a bien établi une équivalence.

III.3. Bases d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E.

- La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si :

  1) c'est une famille génératrice de E.

  2) c'est une famille libre.
- Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, tout vecteur $x \in E$ se décompose de manière unique sous forme d'une combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{B}$.
- Autrement dit : $\forall x \in E, \ \exists! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \ x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$.
- Les réels $(x_1, \dots, x_n)$ sont les **coordonnées** de x dans la base $\mathscr{B}$.

Base canonique des espaces vectoriels de référence

- **L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$**

  Considérons la famille $\mathscr{B}_c = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, définie par :

  $$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \ e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

  Cette famille est libre et génératrice de $\mathbb{K}^n$. C'est donc une base de $\mathbb{K}^n$.
  Ainsi, pour tout vecteur $x \in \mathbb{K}^n$, il existe un unique n-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

  $$x = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e_k$$

  où $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est le n-uplet de coordonnées du vecteur x dans la base $\mathscr{B}_c$.
  Attention ! La notation est ici la même pour représenter le vecteur et ses coordonnées :
  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

- **L'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$**

  Considérons la famille $\mathscr{B}_c = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, définie par :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Cette famille est libre et génératrice de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. C'est donc une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
  Ainsi, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe u unique n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$X = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e_k$$

  où $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est le n-uplet de coordonnées du vecteur X dans la base $\mathscr{B}_c$.

- **L'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$**

  Considérons la famille $\mathscr{B}_c = (\, E_{i,j} \,)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, où $E_{i,j}$ est définie par :

$$E_{i,j} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ - i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccccccc} & & & & | & & & \\ & & & & j & & & \end{array} & \end{array}$$

  Cette famille est libre et génératrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. C'est donc une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Ainsi, pour tout $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une unique séquence $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ telle que :

$$M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \cdot E_{i,j}$$

  et donc $(a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n}, a_{2,1}, \ldots, a_{2,n}, \ldots, a_{n,1}, \ldots, a_{n,n})$ sont les coordonnées de la matrice M dans la base canonique $\mathscr{B}_c$.

  Exemple

  - On considère l'espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Sa base canonique est :

$$\mathscr{B}_c = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

    Les coordonnées de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}_c$ sont $(3, 1, 7, 5)$.

- **L'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$**

  Considérons la famille $\mathscr{B}_c = (P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n)$ où pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P_i(X) = X^i$.
  Cette famille est libre et génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$. C'est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
  Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, il existe un unique n-uplet $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$P(X) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot X + \ldots + a_n \cdot X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot X^k$$

  où $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ est le n-uplet de coordonnées du polynôme P dans la base $\mathscr{B}_c$.

MÉTHODO **Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée**

Illustrons la méthode sur un exemple.

On considère la base $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ et on cherche à déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans cette base.

Cherchons $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Or : $(*) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & & & & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{array} \right.$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & & & & x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & & & = & -4 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & & x_2 & & & = & -4 \\ & & & & x_3 & = & 2 \end{array} \right.$$

(on intervertit les 2 lignes en cas de pivot nul)

$$\underset{L1 \leftarrow L_1 - L_3}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ & & x_2 & & & = & -4 \\ & & & & x_3 & = & 2 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & & & = & 5 \\ & & x_2 & & & = & -4 \\ & & & & x_3 & = & 2 \end{array} \right.$$

Ainsi, le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ a pour coordonnéees $(5, -4, 2)$ dans la base $\mathscr{B}$.

MÉTHODO **Déterminer une base d'un sous-espace propre d'une matrice donnée**

La notion de valeur propre et de sous-espace propre n'est pas au programme de cette semaine. Mais il faut dès à présent savoir déterminer le sous-espace propre $E_\lambda(M) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid MX = \lambda \cdot X\}$ pour une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et une valeur propre λ données (le vocabulaire sera précisé dans le chapitre « Réduction ». Illustrons la méthode sur un exemple.

Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminons $E_{-1}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \mid AX = -X\}$.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_{-1}(A) & \iff & (A+I)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})} \\
& \iff & \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -4\,x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ -2\,x & + & y & - & z & = & 0 \\ 6\,x & - & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow 2\,L_3 + 3\,L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 2\,L_2 - L_1}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -4\,x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \; -4\,x = -2\,y + 2\,z \right.
\end{array}$$

- On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
E_{-1}(A) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \mid x = \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{2}\,z \right\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{2}\,z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y,z) \in \mathbb{K}^2 \right\} \\
& = & \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{K}^2 \right\} \\
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

- La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$:
  - × engendre $E_{-1}(A)$,
  - × est libre car est constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires.

  C'est donc une base de $E_{-1}(A)$.

IV. Espace vectoriel de dimension finie

IV.1. Notion de dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet une base de cardinal fini (*i.e.* constituée d'un nombre fini de vecteurs).

Soit E un $\mathbb{K}$-ev non réduit à $\{0_E\}$.

Supposons que E admet une famille génératrice finie.

1) Alors E possède une base $\mathscr{B}$ de cardinal fini que l'on note $n \in \mathbb{N}^*$.

C'est le théorème de la base incomplète *(démo non exigible)*.

- Toute famille libre (dans E) peut être complétée en une base de E.
- De toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E.
  Ceci signifie que toute famille génératrice de E contient une base de E.

2) Et toutes les bases de E sont finies et de même cardinal n.

C'est issu du résultat clé suivant *(démo non exigible)*.

Si un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E possède une base de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ alors toute famille possédant strictement plus de n éléments est liée.

- Ce nombre n est appelé **dimension de l'espace vectoriel** E, noté $\dim E$.
- Par convention, on note $\dim(\{0_E\}) = 0$.

IV.2. Cardinal d'une famille libre, d'une famille génératrice en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel tel que $E \neq \{0_E\}$.

- **Propriété :**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

Sur les familles libres

a) Toute famille libre possède au plus n vecteurs.

b) Toute famille libre de n vecteurs est une base de E.

c) Toute famille de q vecteurs avec $q > n$ est liée.

d) Toute sous-famille d'une famille libre (dans E) est libre (dans E).

Sur les familles génératrices

a) Toute famille génératrice de E possède au moins n vecteurs.

b) Toute famille génératrice de E de n vecteurs est une base de E.

c) Toute famille de q vecteurs avec $q < n$ n'est pas génératrice de E.

d) Toute sur-famille d'une famille génératrice de E est génératrice de E.

- Ainsi, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :
  - $\times$ E admet une famille libre $(u_1, \dots, u_m)$.
  - $\times$ E admet une famille génératrice $(v_1, \dots, v_p)$.

  Alors : $\underset{\substack{\shortparallel \\ m}}{\mathrm{Card}(\{u_1, \dots, u_m\})} \leqslant \underset{\substack{\shortparallel \\ n}}{\dim(E)} \leqslant \underset{\substack{\shortparallel \\ p}}{\mathrm{Card}(\{v_1, \dots, v_p\})}$

  On pourra retenir :

$$\boxed{\mathrm{Card}\left(\begin{array}{c}\text{une famille}\\ \text{libre de } E\end{array}\right) \leqslant \underset{\substack{\shortparallel \\ \dim(E)}}{\mathrm{Card}\left(\begin{array}{c}\text{une base}\\ \text{de } E\end{array}\right)} \leqslant \mathrm{Card}\left(\begin{array}{c}\text{une famille}\\ \text{génératrice de } E\end{array}\right)}$$

- **Espaces vectoriels de référence :**

  $\dim(\mathbb{K}^n) = n$, $\dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})) = n$, $\dim(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n \times p$, $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$.

MÉTHODO **Démontrer qu'une famille finie $\mathcal{F}$ est une base d'un espace vectoriel F de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$**

Pour démontrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est une base d'un espace vectoriel F, on peut opter pour l'une des méthodes suivantes.

1) **Démontrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre et génératrice de F.**

La famille $\mathcal{F}$ est :

$\times$ génératrice de F,

$\times$ libre.

C'est donc une base de F.

Exemple classique d'utilisation

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 2X\}$ est un ev et en déterminer une base.

(on commence par démontrer $F = \mathrm{Vect}\,(\ \dots\ )$)

2) **Démontrer que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E de cardinal minimal**

La famille $\mathcal{F}$ est :

$\times$ génératrice de F,

$\times$ telle que : $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = p = \dim(F)$.

C'est donc une base de F.

Exemple classique d'utilisation

La famille $\mathcal{F} = \big((1,0,1), (0,1,0), (0,0,1)\big)$ est :

$\times$ génératrice de $\mathbb{K}^3$.
En effet, tout vecteur $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$ s'écrit :

$$(a,b,c) = a \cdot (1,0,1) + b \cdot (0,1,0) + (c-a) \cdot (0,0,1)$$

$\times$ telle que : $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathbb{K}^3)$.

Ainsi, $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{K}^3$.

3) **Démontrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre de cardinal maximal** $\big(\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(F)\big)$

La famille $\mathcal{F}$ est :

× libre,

× telle que : $\text{Card}(\mathcal{F}) = p = \dim(F)$.

C'est donc une base de F.

Exemple classique d'utilisation

La famille $\mathcal{F} = \big((1,0,1),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ est :

× libre ((*à démontrer !*).

× telle que : $\text{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathbb{K}^3)$.

Ainsi, $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{K}^3$.

IV.3. Dimension d'un sous espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

1) Alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.

2)

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ F \text{ sous-espace vectoriel de } E \\ \bullet\ \dim(F) = \dim(E) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad F = E$$

MÉTHODO **Démontrer l'égalité entre deux espaces vectoriels de dimension finie**

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Pour démontrer l'égalité entre ces deux espaces vectoriels, on peut rédiger comme suit.

1) Tout d'abord : $F \subset E$.

2) Or : $\dim(F) = \dim(E)$.

On en conclut : $E = F$.

IV.4. Notion d'hyperplan

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

- On appelle **hyperplan** de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim(E) - 1$.

V. Produit cartésien d'espaces vectoriels

V.1. Produit cartésien d'un nombre fini d'espaces vectoriels

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Soient E_1, E_2, …, E_p des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- On appelle **produit cartésien** des espaces E_1, E_2, …, E_p l'ensemble des p-uplets dont le $k^{\text{ème}}$ terme est un élément de E_k pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.
  On le note :

$$\boxed{\prod_{k=1}^{p} E_k \;=\; E_1 \times \cdots \times E_p \;=\; \big\{(u_1, \dots, u_p) \mid \forall k \in [\![1, p]\!],\ u_k \in E_k\big\}}$$

- On munit cet ensemble des opérations $+$ et $\cdot$ induites par les opérations des E_k.
  Autrement dit, pour tout $(u_1, \dots, u_p)$ et $(v_1, \dots, v_p)$ éléments de $E_1 \times \cdots \times E_p$ et tout λ dans $\mathbb{K}$, on note :

$$\begin{array}{lrcl} & (u_1,\ \dots\ , u_p) \ +\ (v_1,\ \dots\ , v_p) & = & (u_1 +_1 v_1,\ \dots\ , u_p +_p v_p) \\ \text{et} & \lambda \cdot (u_1,\ \dots\ , u_p) & = & (\lambda\ \cdot_1 u_1,\ \dots\ , \lambda\ \cdot_p u_p) \end{array}$$

- Il faut bien lire cette définition. Les éléments u_1, …, u_p sont des vecteurs (des éléments des espaces vectoriels E_1, …, E_p) et pas des scalaires (des éléments de $\mathbb{K}$.
- On peut par exemple considérer le produit cartésien : $\mathbb{K}^3 \times \mathbb{K}^3$. Un élément $u \in \mathbb{K}^3 \times \mathbb{K}^3$ s'écrit sous la forme : (u_1, u_2) avec $u_1 \in \mathbb{K}^3$ et $u_2 \in \mathbb{K}^3$. Les élements u_1 et u_2 sont ici des vecteurs de $\mathbb{K}^3$ et peuvent donc s'écrire sous la forme : $u_1 = (x_1, x_2, x_3)$ et $u_2 = (y_1, y_2, y_3)$ où les éléments x_1, x_2, x_3 et y_1, y_2, y_3 sont des réels. Par exemple :

$$u = \big((1,1,0),\ (1,0,1)\big), \quad u_1 = (1,1,0), \quad u_2 = (1,0,1)$$

V.2. Structure vectorielle d'un produit cartésien

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Soient E_1, E_2, …, E_p des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1. L'ensemble $\prod\limits_{k=1}^{p} E_k$ muni des opérations $+$ et $\cdot$ présentées dans la définition est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2. ***a)*** Si les espaces vectoriels E_1, …, E_p sont de dimensions finies, alors l'espace vectoriel $\prod\limits_{k=1}^{p} E_k$ l'est aussi.

b) De plus, en cas de dimension finie : $\boxed{\dim\Big(\prod\limits_{k=1}^{p} E_k\Big) \;=\; \sum\limits_{k=1}^{p} \dim(E_k)}$

(ainsi : « la dimension d'un produit d'espaces vectoriels est la somme des dimensions »)

VI. Somme de sous-espaces vectoriels

VI.1. Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Soient F_1, F_2, …, F_p des sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

- On appelle **somme** des sous-espaces F_1, F_2, …, F_p l'ensemble des sommes d'éléments pris dans les sous-espaces F_1 à F_p. On la note :

$$\sum_{k=1}^{p} F_k \ = \ F_1 + \cdots + F_p \ = \ \left\{ \sum_{k=1}^{p} u_k \mid \forall\, k \in [\![1,p]\!], u_k \in F_k \right\}$$

- On dit que la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est **directe**, ou que les sous-espaces $F_1, F_2, \ldots, F_p$ sont en **somme directe**, si :

$$\forall (u_1, \ldots, u_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p, \ \left(\sum_{k=1}^{p} u_k = 0_E \ \Rightarrow \ \forall k \in [\![1,p]\!], \ u_k = 0_E \right)$$

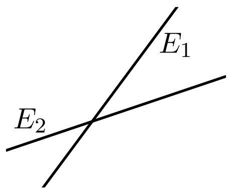
  Si une somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe, on la note : $\bigoplus\limits_{k=1}^{p} F_k = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

- On dit que les sous-espaces F_1, …, F_p sont **supplémentaires** dans E si :

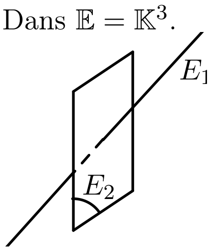
$$E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$$

Représentations graphiques de sous-espaces supplémentaires en dimension 2 et 3

- Dans $E = \mathbb{K}^2$.



- Dans $\mathbb{E} = \mathbb{K}^3$.



VI.2. Une somme de sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient F_1, …, F_p des sous-espaces vectoriels de E.

1) La somme $F_1 + \ldots + F_p$ est un sous-espace vectoriel de E.

2) La somme $F_1 + \ldots + F_p$ est même le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les sous-espaces vectoriels F_1, …, F_p. Plus précisément :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ F \text{ sev de } E \\ \bullet\ \forall i \in [\![1,p]\!],\ F \supseteq F_i \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ F \supseteq \sum_{k=1}^{p} F_k$$

VI.3. Caractérisation de la propriété de somme directe

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Soient F_1, F_2, ..., F_p des sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1) Cas général

La somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe

$\Leftrightarrow$ Tout élément de $F_1 + \cdots + F_p$ se décompose de manière unique en somme d'éléments des sous-espaces vectoriels F_1, ..., F_p

$\Leftrightarrow$ La concaténation de bases $\mathscr{B}_1$ de F_1, ..., $\mathscr{B}_p$ de F_p est une famille libre de $F_1 + \ldots + F_p$

$\Leftrightarrow$ La concaténation de bases $\mathscr{B}_1$ de F_1, ..., $\mathscr{B}_p$ de F_p est une base de $F_1 + \ldots + F_p$

$\Leftrightarrow$ $\forall j \in [\![1, p-1]\!],\ \left(\sum\limits_{i=1}^{j} F_i \right) \cap F_{j+1} = \{0_E\}$

2) Cas de deux sous-espaces
Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces de E, alors :

$$\boxed{F_1 \text{ et } F_2 \text{ sont en somme directe } \Leftrightarrow F_1 \cap F_2 = \{0_E\}}$$

Remarque

- Attention à bien lire ce résultat. Le résultat énoncé pour $p = 2$ ne se généralise pas comme on pourrait le penser en première lecture. Plus précisément, le fait que les intersections multiples soient égales à l'ensemble réduit au vecteur nul est une condition nécessaire mais non suffisante.

$$\text{La somme } F_1 + \ldots + F_p \text{ est directe } \Rightarrow F_1 \cap \cdots \cap F_p = \{0_E\}$$

$$\text{La somme } F_1 + \ldots + F_p \text{ est directe } \Rightarrow \Big(\forall (j,k) \in [\![1,p]\!]^2, j \neq k \ \Rightarrow\ F_j \cap F_k = \{0_E\} \Big)$$

(le sens réciproque est faux pour chacune des ces 2 propriétés)

VI.4. Somme de sous-espaces vectoriels en dimension finie

VI.4.a) Dimension de la somme de sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient F_1, ..., F_p des sous-espaces vectoriels de E.

Supposons que les espaces F_1, ..., F_p sont de **dimensions finies**.

1. Cas général

a) Alors $\sum\limits_{k=1}^{p} F_k$ est de dimension finie et : $\boxed{\dim\left(\sum\limits_{k=1}^{p} F_k \right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{p} \dim(F_k)}$

b) De plus, il y a égalité si et seulement si la somme est directe.

2. Cas de deux sous-espaces (**formule de Grassmann**)
Dans le cas où $p = 2$, on peut même être plus précis.

$$\boxed{\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2)}$$

(cela permet de retrouver au passage que F_1 et F_2 sont en somme directe ssi $\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$)

VI.4.b) Caractérisation du caractère supplémentaire à l'aide de la dimension

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

Supposons que les espaces $F_1, \ldots, F_p$ sont de **dimensions finies**.

1) Cas général

a. Les espaces $F_1, \ldots, F_p$ sont supplémentaires dans E

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\ E = F_1 + \ldots + F_p \\ \bullet\ \text{La somme } F_1 + \ldots + F_p \text{ est directe} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\ \dim(E) \ = \ \dim(F_1 + \ldots + F_p) \\ \bullet\ \dim(F_1 + \ldots + F_p) \ = \ \dim(F_1) + \cdots + \dim(F_p) \end{cases}$$

b. Les espaces $F_1, \ldots, F_p$ sont supplémentaires dans E

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\ E = F_1 + \ldots + F_p \\ \bullet\ \text{La somme } F_1 + \ldots + F_p \text{ est directe} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\ E = F_1 + \ldots + F_p \\ \bullet\ \text{Tout élément de } F_1 + \cdots + F_p \text{ se décompose de manière unique en somme d'éléments des sous-espaces vectoriels } F_1, \ldots, F_p \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ Tout élément de E se décompose de manière unique en somme d'éléments des sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_p$

$\Leftrightarrow$ La concaténation de bases $\mathscr{B}_1$ de $F_1, \ldots, \mathscr{B}_p$ de F_p est une base de E

2) Cas de deux sous-espaces

Les espaces F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\ E = F_1 + F_2 \\ \bullet\ \text{La somme } F_1 + F_2 \text{ est directe} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\ \dim(E) \ = \ \dim(F_1 + F_2) \\ \bullet\ F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\ \dim(E) \ = \ \dim(F_1) + \dim(F_2) \\ \bullet\ F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \end{cases}$$

VI.4.c) Caractérisation des hyperplans par leurs supplémentaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Les hyperplans de E sont les supplémentaires des droites vectorielles de E.

$$\boxed{H \text{ est un hyperplan de } E \ \Leftrightarrow \ \exists a \in E,\ E = H \oplus \operatorname{Vect}(a)}$$

`MÉTHODO` **Démontrer qu'un espace vectoriel s'écrit comme somme de 2 supplémentaires**

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. On souhaite démontrer que E s'écrit sous la forme $E = F_1 \oplus F_2$ où F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de E.
On pourra alors penser à l'une ou l'autre des méthodes suivantes. Ces méthodes doivent toutes être connues car le contexte peut imposer naturellement l'une d'entre elles.

1) Dans le cas où seul l'un des sous-espaces vectoriels est spécifié, il suffit d'utiliser le théorème de la base incomplète.

2) Utilisation de la caractérisation par unicité de la décomposition de tout élément de E sous forme d'une somme d'éléments de F_1 et F_2.
Il est alors classique d'utilise le raisonnement par analyse-synthèse.

3) Utilisation des caractérisations de la supplémentarité à l'aide de la dimension.

Illustration de ces procédés sur des exemples

1) Soit E un sous-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Démontrer que pour toute application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$, il existe G sous-espace vectoriel de E tel que : $E = G \oplus \operatorname{Ker}(f)$.

Démonstration.
Soit $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de de $\operatorname{Ker}(f)$. C'est une famille libre de $\operatorname{Ker}(f)$ et donc de E.
On peut donc la compléter en une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ de E.
On note alors $G = \operatorname{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$.
La base $\mathscr{B}$ étant une concaténation d'une base de $\operatorname{Ker}(f)$ et de G , on a bien : $E = G \oplus \operatorname{Ker}(f)$. □

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer : $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \ \oplus \ \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer que toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique comme somme d'une matrice antisymétrique A et d'une matrice symétrique S.

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Analyse :
Supposons que M s'écrive sous la forme $M = A + S$ $(*)$ où $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$^t(M) \ = \ ^t(A) + {}^t(S) \ = \ -A + S \quad (**)$$

En sommant $(*)$ et $(**)$, on obtient : $S = \dfrac{1}{2}\left({}^t(M) + M\right)$.

En soustrayant $(**)$ à $(*)$, on obtient : $A = \dfrac{1}{2}\left(M - {}^t(M)\right)$.

(la décomposition $(*)$ fournit une unique valeur pour A et S, ce qui assure l'unicité de la solution)

Synthèse :
Notons $S = \dfrac{1}{2}\left({}^t(M) + M\right)$ et $A = \dfrac{1}{2}\left(M - {}^t(M)\right)$. Alors :

$$\begin{aligned} {}^tA &= \frac{1}{2}\, {}^t\left({}^t(M) - M\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(M - {}^t(M)\right) \ = \ -A \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} {}^tS &= \frac{1}{2}\, {}^t\left({}^t(M) + M\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(M + {}^t(M)\right) \ = \ S \end{aligned}$$

Donc $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Donc $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Enfin : $A + S \ = \ \dfrac{1}{2}\left({}^t(M) - M\right) + \dfrac{1}{2}\left({}^t(M) - M\right) \ = \ M.$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \ \oplus \ \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).}$$

□

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer : $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- La famille $\mathcal{F} = \big(E_{i,j} - E_{j,i}\big)_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ est une base de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. On en déduit :

$$\dim\big(\mathscr{A}_n(\mathbb{R})\big) \;=\; \mathrm{Card}\big(\mathscr{A}_n(\mathbb{R})\big) \;=\; \sum_{i=1}^{n-1} i \;=\; \frac{n\,(n-1)}{2}$$

La famille $\mathcal{G}$ obtenue en concaténant les familles $\mathcal{G}_1 = \big(E_{i,j} + E_{j,i}\big)_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ et $\mathcal{G}_2 = \big(E_{i,i}\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\dim\big(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})\big) &= \mathrm{Card}\,(\mathcal{G}) \\
&= \mathrm{Card}\,(\mathcal{G}_1) + \mathrm{Card}\,(\mathcal{G}_2) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n-1} i\right) + n \\
&= \frac{n\,(n-1)}{2} + n \\
&= \frac{n}{2}\;((n-1)+2) \\
&= \frac{n\,(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
\dim\big(\mathscr{A}_n(\mathbb{R})\big) \;+\; \dim\big(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})\big) &= \frac{n\,(n-1)}{2} \;+\; \frac{n\,(n+1)}{2} \\
&= \frac{n}{2}\;((\cancel{n}-1)+(\cancel{n}+1)) \\
&= \frac{n}{2} \times 2\,n \\
&= n^2 \\
&= \dim\,(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \dim\,(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) \;=\; \dim\big(\mathscr{A}_n(\mathbb{R})\big) \;+\; \dim\big(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})\big).}$$

- Soit $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \,\cap\, \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Alors :
  × ${}^tM = -M$ car $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
  × ${}^tM = M$ car $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
  On en déduit : $M = -M$ et donc : $2\,M = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \,\cap\, \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \;=\; \{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\}.}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \;\oplus\; \mathscr{S}_n(\mathbb{R}).}$$

□

Notons enfin que l'écriture sous forme d'une somme de supplémentaires amène naturellement à considérer une base adaptée au problème (une famille issue de la concaténation d'une base de F_1 et d'une base de F_2). Cette base peut être introduite lors de la démonstration de la décomposition sous forme de somme ou plus tard dans l'exercice.

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

Cette semaine, les questions de cours sont les suivantes :

– étude d'une intégrale fonction de ses bornes choisie par le colleur.
– détermination de la limite d'une somme de Riemann choisie par le colleur (avec calcul de l'intégrale par primitivation à vue ou intégration par parties).
– détermination du sous-espace propre $E_\lambda(M) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid MX = \lambda \cdot X\}$ pour une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et une valeur λ données.
  (le vocabulaire de sous-espace propre et de valeur propre est réservé aux $5/2$*)*
– démonstration qu'un ensemble (fourni par le colleur) est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence.
– démonstration de la liberté d'une famille (fournie par le colleur).

Exercices types

Les compétences attendues cette semaine sur ce chapitre sont les suivantes :

– bien comprendre que $\text{Vect}(A)$, espace vectoriel engendré par la partie A, représente l'ensemble des CL d'éléments de A.
– savoir procéder à des « simplifications » d'une partie A d'un espace vectoriel engendré par A.
– savoir démontrer qu'un ensemble est (ou n'est pas) un espace vectoriel.
  En particulier, savoir démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel.
– savoir démontrer qu'une famille est libre dans un espace vectoriel F :
  × si la famille possède seulement un vecteur.
  × si la famille possède seulement deux vecteurs.
  × si la famille possède trois vecteurs ou plus (revenir à la définition).
– savoir démontrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est génératrice d'un espace vectoriel F :
  × car F s'écrit naturellement sous la forme $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$.
  × en revenant à la définition c'est-à-dire en démontrant que tout vecteur de F s'écrit comme CL des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$.
– savoir démontrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est une base d'un espace vectoriel F :
  × car $\mathcal{F}$ est libre et génératrice de F.
  × **car $\mathcal{F}$ est génératrice de F et de cardinal minimal** (*cf rédaction détaillée*).
  × **car $\mathcal{F}$ est libre et de cardinal maximal** (*cf rédaction détaillée*).
– savoir calculer les coordonnées d'un vecteur de F dans une base $\mathscr{B}$ de F.
– savoir démontrer que l'intersection $F \cap G$ de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.
– savoir démontrer que la réunion $F \cup G$ de deux sous-espaces vectoriels de E n'est pas, de manière générale, un sous-espace vectoriel de E (on exhibera un contre-exemple).
– connaître les bases canoniques des espaces vectoriels de référence.
  (comprendre que `SEULS` *les espaces vectoriels de référence ont une base canonique !)*
– savoir déterminer le sous-espace propre $E_\lambda(M) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid MX = \lambda \cdot X\}$ pour une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et une valeur propre λ données. Le vocabulaire de sous-espace propre et de valeur propre est réservé aux $5/2$.

- savoir résoudre un système d'équations linéaires homogène ou non homogène.
  On prendra particulièrement soin à l'écriture des systèmes et on opérera par une application **stricte** de la méthode du pivot de Gauss (les colleurs sont autorisés à exclure de colle -avec attribution de la note 0- tout élève qui opère par substitution).
- savoir démontrer que des sous-espaces sont supplémentaires dans un espace vectoriel E (soit par analyse-synthèse, soit par des arguments de dimension).
- savoir utiliser le théorème de la base incomplète.
  $\hookrightarrow$ il faut y penser lorsque l'énoncé demande de créer une base d'un espace vectoriel vérifiant certaines propriétés.