Colles

semaine 7 : 09 octobre - 14 octobre

I. Notion d'application linéaire

I.1. Définition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- Une application $f : E \to F$ est dite **linéaire** si :

  $\forall (x,y) \in E^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$
  (l'image d'une somme est la somme des images)

  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E^2,\ f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$
  (l'image d'une multiplication par un scalaire est la multiplication scalaire de l'image)

- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E,F)$.
- Lorsque $E = F$, on notera simplement $\mathscr{L}(E)$.
  Une application linéaire de E dans E est appelée **endomorphisme** de E.
- **Caractérisation des applications linéaires**.

  L'application $f : E \to F$ est linéaire
  $\Leftrightarrow\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x,y) \in E^2,\ f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y)$

  $\Leftrightarrow\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x,y) \in E^2,\ f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y)$
  $\Leftrightarrow\ \forall \mu \in \mathbb{K}, \forall (x,y) \in E^2,\ f(x + \mu \cdot y) = f(x) + \mu \cdot f(y)$
  (éviter ces 2 dernières caractérisations qui introduisent une dissymétrie de traitement des vecteurs x et y et masquent la notion de CL)

I.2. Propriétés

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire.

1) $\boxed{f(0_E) \ = \ 0_F}$

2) $\boxed{\forall x \in E,\ f(-x) = -f(x)}$

3) $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n,$

$$\boxed{f(\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_n \cdot x_n) = \lambda_1 \cdot f(x_1) + \dots + \lambda_n \cdot f(x_n)}$$

(l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images)

I.3. Exemple fondamental

> Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
> Soit $h \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$.
> Alors, il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que h s'écrit sous la forme :
>
> $$h \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & MX \end{array} \right.$$

Démonstration.
Notons $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $E = \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
Notons $\mathscr{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$ la base canonique de $F = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- Soit $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Le vecteur X se décompose de manière unique sur $\mathscr{B}_E$.
  Autrement dit, il existe un unique p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ tel que :

$$X \ = \ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \ = \ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \ + \ \dots \ + x_p \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ = \ x_1 \cdot e_1 + \ \dots \ + x_p \cdot e_p$$

  Par application de la fonction h, linéaire, on obtient :

$$h(X) \ = \ x_1 \cdot h(e_1) + \ \dots \ + x_p \cdot h(e_p)$$

  Cette écriture met en avant une propriété des applications linéaires sur les ev de dimension finie : les valeurs $h(e_1)$, …, $h(e_p)$ permettent de déterminer la valeur de $h(X)$.
  Ainsi, f est entièrement déterminée par l'image de la base $\mathscr{B}_E$.

- Notons alors :

$$h(e_1) = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{n1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R}) \qquad \dots \qquad h(e_p) = \begin{pmatrix} m_{1p} \\ m_{2p} \\ \vdots \\ m_{np} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$$

- Alors :

$$h(X) \ = \ \begin{pmatrix} m_{11} \ x_1 + \ldots + m_{1p} \ x_p \\ m_{21} \ x_1 + \ldots + m_{2p} \ x_p \\ \vdots \\ m_{n1} \ x_1 + \ldots + m_{np} \ x_p \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1p} \\ m_{21} & \dots & m_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \ = \ MX$$

  où $M = (m_{ij})_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ j \in [\![1,p]\!]}}$

□

II. Structure de l'ensemble des applications linéaires

II.1. L'espace vectoriel $\mathscr{L}(E, F)$

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- L'ensemble $\mathscr{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F est muni :
  - × d'une loi de composition interne, notée $+$
    Pour tout $u \in \mathscr{L}(E, F)$, pour tout $v \in \mathscr{L}(E, F)$, $u + v$ est l'application linéaire de E dans F définie par :

$$u + v : \begin{array}{rcl} E & \to & F \\ x & \mapsto & u(x) + v(x) \end{array}$$

  - × d'une loi de composition externe, notée $\cdot$
    Pour tout $u \in \mathscr{L}(E, F)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot u$ est l'application linéaire de E dans F définie par :

$$\lambda \cdot u : \begin{array}{rcl} E & \to & F \\ x & \mapsto & \lambda \cdot u(x) \end{array}$$

- L'espace $\mathscr{L}(E, F)$ muni de $+$ et $\cdot$ est un espace vectoriel.

II.2. Composition d'applications linéaires

a) Propriétés de la loi $\circ$

Soient E, F, G et H des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1) $\forall u \in \mathscr{L}(E),\ u \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \circ u = u$.
Par ailleurs, pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, on introduit la notation :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^0 = \mathrm{id}_E \\ \forall k \in \mathbb{N},\ u^{k+1} = u^k \circ u \ (= u \circ u^k) \end{array} \right.$$

(La notation $u^2(x) = u(u(x))$ ne doit pas être confondue avec l'élévation au carré ! $u(x) \times u(x)$ n'a pas de sens dans le cadre d'espaces vectoriels)

2) $\forall u \in \mathscr{L}(E, F),\ \forall v \in \mathscr{L}(F, G),\ v \circ u \in \mathscr{L}(E, G)$.

3) $\forall u \in \mathscr{L}(E, F),\ \forall v \in \mathscr{L}(F, G), \forall w \in \mathscr{L}(G, H),\ w \circ (v \circ u) = (w \circ v) \circ u$.
(associativité de la loi $\circ$)

b) Comportement de la loi $\circ$ vis à vis des lois $+$ et $\cdot$

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1) $\forall u \in \mathscr{L}(E, F),\ \forall (v_1, v_2) \in \big(\mathscr{L}(F, G)\big)^2,\ (v_1 + v_2) \circ u \ = \ v_1 \circ u + v_2 \circ u$.
(distributivité à droite de la loi $\circ$ par rapport à la loi $+$)

2) $\forall (u_1, u_2) \in \big(\mathscr{L}(E, F)\big)^2,\ \forall v \in \mathscr{L}(F, G),\ v \circ (u_1 + u_2) \ = \ v \circ u_1 + v \circ u_2$.
(distributivité à gauche de la loi $\circ$ par rapport à la loi $+$)

3) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u \in \mathscr{L}(E, F),\ \forall v \in \mathscr{L}(F, G),\ v \circ (\lambda \cdot u) = (\lambda \cdot v) \circ u = \lambda \cdot (v \circ u)$.

II.3. Notion d'isomorphisme, d'automorphisme

a) Définition

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- Une application $u : E \to F$ est un **isomorphisme de E dans F** si :
  (i) $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
  (ii) u est bijective.

  S'il existe un isomorphisme de E dans F, on dit que E et F sont isomorphes.
- Une application $u : E \to E$ est un **automorphisme de E dans F** si :
  (i) $u \in \mathscr{L}(E)$ (autrement dit, u est un endomorphisme de E).
  (ii) u est bijective.

b) Notion d'application réciproque : rappels de première année

Soient E et F des ensembles (pas nécessairement des ev).
Soit $f : E \to F$ une application (pas nécessairement linéaire).
On suppose que f est bijective.

- On appelle **application réciproque de** f et on note $f^{-1} : F \to E$:

$$f^{-1} \ : \ \begin{array}{rcl} F & \to & E \\ y & \mapsto & f^{-1}(y) \end{array} \ : \ \text{l'unique antécédent de } y \text{ par l'application } f$$

  Ainsi : $\forall x \in E, \forall y \in F, \quad \boxed{y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x}$
- Si $f : E \to F$ une application bijective, les propriétés suivantes sont vérifiées.

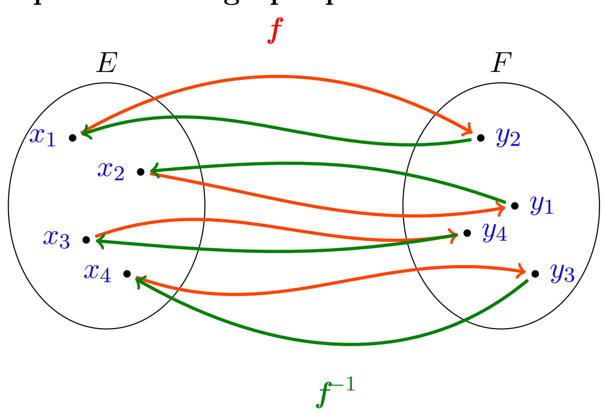
  1. L'application f^{-1} est bijective et de récirpoque f : $\boxed{\left(f^{-1}\right)^{-1} = f}$

  2. ***a)*** $\boxed{\forall y \in F, \ f(f^{-1}(y)) = y}$ ***b)*** $\boxed{\forall x \in E, \ f^{-1}(f(x)) = x}$

  3. Si $f : E \to F$ et $g : F \to E$ sont deux applications, alors :

$$\left.\begin{array}{r} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l}\text{Les applications } f \text{ et } g \text{ sont bijectives et} \\ \text{réciproques l'une de l'autre :} \\ \qquad g = f^{-1} \quad \text{et} \quad f = g^{-1}\end{array}$$

Représentation graphique.



- Une application $f : E \to F$ bijective établit une correspondance un à un entre des éléments de E vers les éléments de F.
- Son application réciproque f^{-1} établit la même correspondance mais dans l'autre sens : des éléments de F vers les éléments de E.

c) Application réciproque d'un isomorphisme

> Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
>
> Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose que u est bijective.
> *(ainsi u est un isomorphisme de E dans F)*
>
> Alors l'application réciproque u^{-1} est un isomorphisme de F dans E.
> *(en particulier, $u^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$)*

Démonstration.

- L'application $u^{-1} : F \to E$ est bijective en tant que réciproque de l'application $u : E \to F$ qui est elle-même bijective.
- Il reste à démontre que $u^{-1} : F \to E$ est linéaire.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(y_1, y_2) \in F^2$.
  L'application u étant surjective :
  × il existe $x_1 \in E$ tel que : $y_1 = u(x_1)$. Ce qu'on peut aussi écrire : $x_1 = u^{-1}(y_1)$.
  × il existe $x_2 \in E$ tel que : $y_2 = u(x_2)$. Ce qu'on peut aussi écrire : $x_2 = u^{-1}(y_2)$.
  On en déduit :
$$\begin{aligned} u^{-1}(\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2) &= u^{-1}\Big(\lambda_1 \cdot u(x_1) + \lambda_2 \cdot u(x_2)\Big) \\ &= u^{-1}\Big(u(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2)\Big) \\ &= \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \\ &= \lambda_1 \cdot u^{-1}(y_1) + \lambda_2 \cdot u^{-1}(y_2) \end{aligned}$$
  Ainsi, $u^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$. □

> Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
>
> Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, E)$.
>
> Supposons que u et v sont des isomorphismes.
>
> *1)* Alors $v \circ u : E \to E$ est un automorphisme de E.
> *(on a notamment $v \circ u \in \mathscr{L}(E)$)*
>
> *2)* La réciproque de $v \circ u$ est donnée par : $\boxed{(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}}$

Démonstration.

- L'application $v \circ u$ est linéaire ($v \circ u \in \mathscr{L}(E)$) en tant que composée de deux applications linéaires.
- Il reste à démontrer que $v \circ u$ est bijective.
  Démontrons que $f = v \circ u : E \to E$ admet pour réciproque $g = u^{-1} \circ v^{-1} : E \to E$.
$$\begin{aligned} g \circ f &= (u^{-1} \circ v^{-1}) \circ (v \circ u) \\ &= u^{-1} \circ (v^{-1} \circ v) \circ u \\ &= u^{-1} \circ \mathrm{id}_F \circ u \\ &= u^{-1} \circ u \\ &= \mathrm{id}_E \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f \circ g &= (v \circ u) \circ (u^{-1} \circ v^{-1}) \\ &= v \circ (u \circ u^{-1}) \circ v^{-1} \\ &= v \circ \mathrm{id}_F \circ v^{-1} \\ &= v \circ v^{-1} \\ &= \mathrm{id}_E \end{aligned}$$
  Ainsi f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre. □

Informations concernant cette semaine de colles

Exercices types

En ce début de chapitre, les compétences attendues sont essentiellement celles de première année. Le colleur peut proposer un exercice où il faut démontrer la linéarité d'une application et savoir déterminer son noyau. Le colleur peut proposer un exercice plus poussé en donnant des indications et rappelant brièvement les méthodes.