Colles

semaine 8 : 16 octobre - 21 octobre

I. Notion d'application linéaire

I.1. Définition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- Une application $f : E \to F$ est dite **linéaire** si :

  $\forall (x,y) \in E^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$
  (l'image d'une somme est la somme des images)

  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E^2,\ f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$
  (l'image d'une multiplication par un scalaire est la multiplication scalaire de l'image)

- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E,F)$.
- Lorsque $E = F$, on notera simplement $\mathscr{L}(E)$.
  Une application linéaire de E dans E est appelée **endomorphisme** de E.
- **Caractérisation des applications linéaires**.

  L'application $f : E \to F$ est linéaire

  $\Leftrightarrow\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x,y) \in E^2,\ f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y)$

  $\Leftrightarrow\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x,y) \in E^2,\ f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y)$

  $\Leftrightarrow\ \forall \mu \in \mathbb{K}, \forall (x,y) \in E^2,\ f(x + \mu \cdot y) = f(x) + \mu \cdot f(y)$

  (éviter ces 2 dernières caractérisations qui introduisent une dissymétrie de traitement des vecteurs x et y et masquent la notion de CL)

I.2. Propriétés

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire.

1) $\boxed{f(0_E) = 0_F}$

2) $\boxed{\forall x \in E,\ f(-x) = -f(x)}$

3) $\forall (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n,$

$$\boxed{f(\lambda_1 \cdot x_1 + \cdots + \lambda_n \cdot x_n) = \lambda_1 \cdot f(x_1) + \cdots + \lambda_n \cdot f(x_n)}$$

(l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images)

I.3. Exemple fondamental

Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Soit $h \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$.

Alors, il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que h s'écrit sous la forme :

$$h \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & MX \end{array} \right.$$

Démonstration.

Notons $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $E = \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Notons $\mathscr{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$ la base canonique de $F = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- Soit $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Le vecteur X se décompose de manière unique sur $\mathscr{B}_E$.
  Autrement dit, il existe un unique p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ tel que :

$$X \ = \ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \ = \ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \ + \ \dots \ + x_p \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ = \ x_1 \cdot e_1 + \ \dots \ + x_p \cdot e_p$$

  Par application de la fonction h, linéaire, on obtient :

$$h(X) \ = \ x_1 \cdot h(e_1) + \ \dots \ + x_p \cdot h(e_p)$$

  Cette écriture met en avant une propriété des applications linéaires sur les ev de dimension finie : les valeurs $h(e_1)$, ..., $h(e_p)$ permettent de déterminer la valeur de $h(X)$.
  Ainsi, f est entièrement déterminée par l'image de la base $\mathscr{B}_E$.

- Notons alors :

$$h(e_1) = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{n1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R}) \qquad \dots \qquad h(e_p) = \begin{pmatrix} m_{1p} \\ m_{2p} \\ \vdots \\ m_{np} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$$

- Alors :

$$h(X) \ = \ \begin{pmatrix} m_{11}\ x_1 + \dots + m_{1p}\ x_p \\ m_{21}\ x_1 + \dots + m_{2p}\ x_p \\ \vdots \\ m_{n1}\ x_1 + \dots + m_{np}\ x_p \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1p} \\ m_{21} & \dots & m_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \ = \ MX$$

  où $M = (m_{ij})_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ j \in [\![1,p]\!]}}$

$\square$

II. Structure de l'ensemble des applications linéaires

II.1. L'espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F est muni :
  - × d'une loi de composition interne, notée $+$
    Pour tout $u \in \mathscr{L}(E,F)$, pour tout $v \in \mathscr{L}(E,F)$, $u+v$ est l'application linéaire de E dans F définie par :
    $$u+v : \begin{array}{rcl} E & \to & F \\ x & \mapsto & u(x)+v(x) \end{array}$$
  - × d'une loi de composition externe, notée $\cdot$
    Pour tout $u \in \mathscr{L}(E,F)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot u$ est l'application linéaire de E dans F définie par :
    $$\lambda \cdot u : \begin{array}{rcl} E & \to & F \\ x & \mapsto & \lambda \cdot u(x) \end{array}$$
- L'espace $\mathscr{L}(E,F)$ muni de $+$ et $\cdot$ est un espace vectoriel.

II.2. Composition d'applications linéaires

a) Propriétés de la loi $\circ$

Soient E, F, G et H des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1) $\forall u \in \mathscr{L}(E),\ u \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \circ u = u$.
Par ailleurs, pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, on introduit la notation :
$$\left\{ \begin{array}{l} u^0 = \mathrm{id}_E \\ \forall k \in \mathbb{N},\ u^{k+1} = u^k \circ u \ (= u \circ u^k) \end{array} \right.$$
(La notation $u^2(x) = u(u(x))$ ne doit pas être confondue avec l'élévation au carré ! $u(x) \times u(x)$ n'a pas de sens dans le cadre d'espaces vectoriels)

2) $\forall u \in \mathscr{L}(E,F),\ \forall v \in \mathscr{L}(F,G),\ v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$.

3) $\forall u \in \mathscr{L}(E,F),\ \forall v \in \mathscr{L}(F,G), \forall w \in \mathscr{L}(G,H),\ w \circ (v \circ u) = (w \circ v) \circ u$.
(associativité de la loi $\circ$)

b) Comportement de la loi $\circ$ vis à vis des lois $+$ et $\cdot$

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1) $\forall u \in \mathscr{L}(E,F),\ \forall (v_1,v_2) \in \big(\mathscr{L}(F,G)\big)^2,\ (v_1+v_2) \circ u \ = \ v_1 \circ u + v_2 \circ u$.
(distributivité à droite de la loi $\circ$ par rapport à la loi $+$)

2) $\forall (u_1,u_2) \in \big(\mathscr{L}(E,F)\big)^2,\ \forall v \in \mathscr{L}(F,G),\ v \circ (u_1+u_2) \ = \ v \circ u_1 + v \circ u_2$.
(distributivité à gauche de la loi $\circ$ par rapport à la loi $+$)

3) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u \in \mathscr{L}(E,F),\ \forall v \in \mathscr{L}(F,G),\ v \circ (\lambda \cdot u) = (\lambda \cdot v) \circ u = \lambda \cdot (v \circ u)$.

II.3. Notion d'isomorphisme, d'automorphisme

a) Définition

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- Une application $u : E \to F$ est un **isomorphisme de E dans F** si :
  - *(i)* $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
  - *(ii)* u est bijective.

  S'il existe un isomorphisme de E dans F, on dit que E et F sont isomorphes.
- Une application $u : E \to E$ est un **automorphisme de E dans F** si :
  - *(i)* $u \in \mathscr{L}(E)$ (autrement dit, u est un endomorphisme de E).
  - *(ii)* u est bijective.

b) Notion d'application réciproque : rappels de première année

Soient E et F des ensembles (pas nécessairement des ev).
Soit $f : E \to F$ une application (pas nécessairement linéaire).
On suppose que f est bijective.

- On appelle **application réciproque de f** et on note $f^{-1} : F \to E$:

$$\begin{array}{rcccl} f^{-1} & : & F & \to & E \\ & & y & \mapsto & f^{-1}(y) \quad : \quad \text{l'unique antécédent de } y \text{ par l'application } f \end{array}$$

  Ainsi : $\forall x \in E, \forall y \in F,\quad \boxed{y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x}$
- Si $f : E \to F$ une application bijective, les propriétés suivantes sont vérifiées.

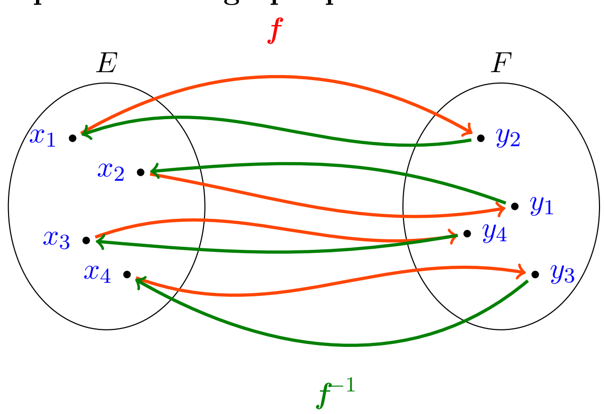
  1. L'application f^{-1} est bijective et de récirpoque f : $\boxed{\left(f^{-1}\right)^{-1} = f}$

  2. ***a)*** $\boxed{\forall y \in F,\ f(f^{-1}(y)) = y}$ ***b)*** $\boxed{\forall x \in E,\ f^{-1}(f(x)) = x}$

  3. Si $f : E \to F$ et $g : F \to E$ sont deux applications, alors :

  $$\left.\begin{array}{l} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l}\text{Les applications } f \text{ et } g \text{ sont bijectives et} \\ \text{réciproques l'une de l'autre :} \\ \qquad g = f^{-1} \quad \text{et} \quad f = g^{-1}\end{array}$$

Représentation graphique.



- Une application $f : E \to F$ bijective établit une correspondance un à un entre des éléments de E vers les éléments de F.
- Son application réciproque f^{-1} établit la même correspondance mais dans l'autre sens : des éléments de F vers les éléments de E.

c) Application réciproque d'un isomorphisme

> Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
>
> Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose que u est bijective.
> *(ainsi u est un isomorphisme de E dans F)*
>
> Alors l'application réciproque u^{-1} est un isomorphisme de F dans E.
> *(en particulier, $u^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$)*

Démonstration.

- L'application $u^{-1} : F \to E$ est bijective en tant que réciproque de l'application $u : E \to F$ qui est elle-même bijective.
- Il reste à démontre que $u^{-1} : F \to E$ est linéaire.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(y_1, y_2) \in F^2$.
  L'application u étant surjective :
  - $\times$ il existe $x_1 \in E$ tel que : $y_1 = u(x_1)$. Ce qu'on peut aussi écrire : $x_1 = u^{-1}(y_1)$.
  - $\times$ il existe $x_2 \in E$ tel que : $y_2 = u(x_2)$. Ce qu'on peut aussi écrire : $x_2 = u^{-1}(y_2)$.

  On en déduit :
$$\begin{aligned} u^{-1}(\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2) &= u^{-1}\Big(\lambda_1 \cdot u(x_1) + \lambda_2 \cdot u(x_2)\Big) \\ &= u^{-1}\Big(u(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2)\Big) \\ &= \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \\ &= \lambda_1 \cdot u^{-1}(y_1) + \lambda_2 \cdot u^{-1}(y_2) \end{aligned}$$
  Ainsi, $u^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$. □

> Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
>
> Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, E)$.
>
> Supposons que u et v sont des isomorphismes.
>
> *1)* Alors $v \circ u : E \to E$ est un automorphisme de E.
> *(on a notamment $v \circ u \in \mathscr{L}(E)$)*
>
> *2)* La réciproque de $v \circ u$ est donnée par : $\boxed{(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}}$

Démonstration.

- L'application $v \circ u$ est linéaire ($v \circ u \in \mathscr{L}(E)$) en tant que composée de deux applications linéaires.
- Il reste à démontrer que $v \circ u$ est bijective.
  Démontrons que $f = v \circ u : E \to E$ admet pour réciproque $g = u^{-1} \circ v^{-1} : E \to E$.
$$\begin{aligned} g \circ f &= (u^{-1} \circ v^{-1}) \circ (v \circ u) \\ &= u^{-1} \circ (v^{-1} \circ v) \circ u \\ &= u^{-1} \circ \mathrm{id}_F \circ u \\ &= u^{-1} \circ u \\ &= \mathrm{id}_E \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f \circ g &= (v \circ u) \circ (u^{-1} \circ v^{-1}) \\ &= v \circ (u \circ u^{-1}) \circ v^{-1} \\ &= v \circ \mathrm{id}_F \circ v^{-1} \\ &= v \circ v^{-1} \\ &= \mathrm{id}_E \end{aligned}$$
  Ainsi f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre. □

III. Noyau et image d'une application linéaire

III.1. Noyau d'une application linéaire

a) Définition

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

- On appelle **noyau de** f et on note $\mathrm{Ker}(f)$ le sous-ensemble de E défini par :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker}(f) & = & \{x \in E \mid f(x) = 0_F\} \\ & = & \{machin \in E \mid f\big(machin\big) = 0_F\} \end{array}}$$

- En particulier, on retiendra, pour tout $x \in E$: $\boxed{x \in \mathrm{Ker}(f) \ \Leftrightarrow\ f(x) = 0_F}$

$$\forall\, machin \in E, \ \boxed{machin \in \mathrm{Ker}(f) \ \Leftrightarrow\ f\big(machin\big) = 0_F}$$

Exercice

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.

Démontrer : $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$.

Démonstration.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0_E$.

$$\begin{array}{rcll} f^2(x) & = & (f \circ f)(x) & \\ & = & f\big(f(x)\big) & \\ & = & f\big(0_E\big) & \textit{(car } x \in \mathrm{Ker}(f)\textit{)} \\ & = & 0_E & \textit{(car } f \in \mathscr{L}(E,F)\textit{)} \end{array}$$

Ainsi, $x \in \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$. □

b) Structure du noyau d'une application linéaire

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

1) $\mathrm{Ker}(f) \subseteq E$ par définition.

2) $\mathrm{Ker}(f) \neq \varnothing$ car $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$. En effet : $f(0_E) = 0_F$.

3) Stabilité de $\mathrm{Ker}(f)$ par combinaisons linéaires

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(x_1, x_2) \in (\mathrm{Ker}(f))^2$.

$$\begin{array}{rcccll} f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) & = & \lambda_1 \cdot f(x_1) & + & \lambda_2 \cdot f(x_2) & \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \\ & = & \lambda_1 \cdot 0_F & + & \lambda_2 \cdot 0_F & \textit{(car } (x_1,x_2) \in (\mathrm{Ker}(f))^2\textit{)} \\ & = & 0_F & & & \end{array}$$

Ainsi : $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \in \mathrm{Ker}(f)$. □

c) Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire à l'aide de son noyau

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$\boxed{f \text{ injective } \Leftrightarrow \text{ Ker}(f) = \{0_E\}}$$

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons f injective. Démontrons : $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

($\supset$) Comme f linéaire, $f(0_E) = 0_F$. Ce qui démontre : $\text{Ker}(f) \supset \{0_E\}$.

($\subset$) Soit $x \in \text{Ker}(f)$. Ainsi : $f(x) = 0_F = f(0_E)$.
L'application f étant injective, $x = 0_E$. Ce qui démontre : $x \in \{0_E\}$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$. Démontrons que f est injective.

Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$.
On a alors : $f(x) - f(y) = 0_F$, ce qui s'écrit : $f(x - y) = 0_F$.
Ainsi, $x - y \in \text{Ker}(f) = \{0_E\}$, d'où $x - y = 0_E$ et $x = y$. □

III.2. Image d'une application linéaire

a) Définition

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- On appelle **image de** f et on note $\text{Im}(f)$ le sous-ensemble de F défini par :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \text{Im}(f) & = & \{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\} \\ & = & \{f(x) \in F \mid x \in E\} \\ & = & \{f(truc) \in F \mid truc \in E\} \end{array}}$$

- En particulier, on retiendra, pour tout $y \in F$: $\boxed{y \in \text{Im}(f) \ \Leftrightarrow \ y = f(\dots)}$

$$\forall truc \in F, \ \boxed{truc \in \text{Im}(f) \ \Leftrightarrow \ \exists\, bidule \in E, truc = f\big(bidule\big)}$$

`À RETENIR`

Démontrer qu'un vecteur $y \in F$ est dans l'image de f, c'est l'écrire sous la forme :

$$y = f(\dots)$$

Exercice

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.

Démontrer : $\mathrm{Im}\left(f^2\right) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Démonstration.
Soit $y \in \mathrm{Im}\left(f^2\right)$.
Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f^2(x)$.
Finalement :

$$\begin{array}{rcl} y & = & f^2(x) \\ & = & f\big(f(x)\big) \end{array}$$

Ainsi, $y \in \mathrm{Im}(f)$. □

b) Structure de l'image d'une application linéaire

> Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
> Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
>
> Alors $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration.

1) $\mathrm{Im}(f) \subseteq F$ par définition.

2) $\mathrm{Im}(f) \neq \varnothing$ car $0_F \in \mathrm{Im}(f)$. En effet : $0_F = f(0_E)$.

3) Stabilité de $\mathrm{Im}(f)$ par combinaisons linéaires
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(y_1, y_2) \in (\mathrm{Im}(f))^2$.
Ainsi, il existe $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que : $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.

$$\begin{array}{rcll} \lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 & = & \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) & \\ & = & f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) & \qquad \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \end{array}$$

Ainsi, $\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 \in \mathrm{Im}(f)$.

□

c) Caractérisation de la surjectivité d'une application

> Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
> Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
>
> $$\boxed{f \text{ surjective } \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F}$$

IV. Applications linéaires en dimension finie

IV.1. Image d'une application linéaire en dimension finie

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

On suppose que E est de dimension finie p et on note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1) L'application f est entièrement déterminée par sa valeur sur $\mathscr{B}$.
Autrement dit, si l'on connaît la valeur de $f(e_1)$, ..., $f(e_p)$, on connaît la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in E$.

2) $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(e_1), \dots, f(e_p)\right)}$

Démonstration.

($\subset$) Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$.
Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Le vecteur x se décompose de manière unique sur $\mathscr{B}$.
Autrement dit, il existe un unique p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ tel que : $x = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_p \cdot e_p$.
Ainsi, par linéarité de f :

$$y = f(x) = x_1 \cdot f(e_1) + \dots + x_p \cdot f(e_p)$$

Ainsi, $y \in \mathrm{Vect}\left(f(e_1), \dots, f(e_p)\right)$.

($\supset$) Soit $y \in \mathrm{Vect}\left(f(e_1), \dots, f(e_p)\right)$. Il existe alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$y = \lambda_1 \cdot f(e_1) + \ldots + \lambda_p \cdot f(e_p) = f\Big(\lambda_1 \cdot e_1 + \ldots + \lambda_p \cdot e_p\Big)$$

Ainsi, $y \in \mathrm{Im}(f)$. □

IV.2. Une première caractérisation de l'injectivité / surjectivité / bijectivité en dimension finie

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

On suppose que E **est de dimension finie**. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- Tout d'abord :

  L'application f est injective
  $\Leftrightarrow$ L'image par f de toute famille libre (finie) de E est une famille libre (finie) de F.

  L'application f est surjective
  $\Leftrightarrow$ L'image par f de toute famille génératrice (finie) de E est une famille génératrice (finie) de F.

  L'application f est bijective
  $\Leftrightarrow$ L'image par f de toute base (finie) de E est une base (finie) de F.

- On déduit de ce dernier résultat :

  $\dim(E) = \dim(F)$ $\Leftrightarrow$ Il existe une application linéaire bijective entre E et F

IV.3. Rang d'une application linéaire

a) Définition

Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

On suppose que E est **de dimension finie**.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

On appelle rang de l'application f et on note $\operatorname{rg}(f)$:

$$\boxed{\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f))}$$

b) Théorème du rang

Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

On suppose que E est **de dimension finie**.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1) Le sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker}(f)$ admet un supplémentaire dans E qui est isomorphe à $\operatorname{Im}(f)$. Autrement dit :

$$\boxed{\exists\, G \subset E,\ E = G \oplus \operatorname{Ker}(f) \quad \text{où } G \text{ est un sev de } E \text{ tel que } \dim(G) = \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big)}$$

(on a même : $f(G) = \operatorname{Im}(f)$)

2)
$$\boxed{\begin{aligned} \dim(E) &= \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) \\ &= \dim(\ker(f)) + \operatorname{rg}(f) \end{aligned}}$$

c) Caractérisation de l'injectivité / surjectivité / bijectivité en dimension finie

Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

On suppose que E et F sont de **de dimensions finies**.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

Alors :

$$\boxed{f \text{ est injective} \ \Leftrightarrow\ \operatorname{rg}(f) = \dim(E)}$$

$$\boxed{f \text{ est surjective} \ \Leftrightarrow\ \operatorname{rg}(f) = \dim(F)}$$

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

On suppose que $\dim(E) = \dim(F)$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

Alors :

$$\boxed{f \text{ est bijective} \ \Leftrightarrow\ f \text{ est injective} \ \Leftrightarrow\ f \text{ est surjective}}$$

ou encore :

$$\boxed{f \text{ est bijective} \ \Leftrightarrow\ \ker(f) = \{0_E\} \ \Leftrightarrow\ \operatorname{rg}(f) = \dim(F)}$$

IV.4. Formes linéaires et hyperplans

a) Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

b) Caractérisation des hyperplans de E en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit H un sous-espace vectoriel de E.

On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\boxed{H \text{ est un hyperplan de } E \quad \Leftrightarrow \quad \exists \varphi \in \big(\mathscr{L}(E, \mathbb{K})\big) \setminus \{0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{K})}\},\ H = \mathrm{Ker}(\varphi)}$

2. Soient $\varphi_1 \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ et $\varphi_2 \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ deux formes linéaires.
On suppose que ces formes linéaires sont non nulles.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi_1) = \mathrm{Ker}(\varphi_2) \quad \Leftrightarrow \quad \exists a \in \mathbb{K}^*,\ \varphi_1 = a \cdot \varphi_2}$$

(autrement dit, deux formes linéaires définissent le même hyperplans ssi elles sont colinéaires)

V. Représentation matricielle de vecteurs et d'applications linéaires

V.1. Matrice colonne associée à un vecteur

a) Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.

- Soit $x \in E$. Il existe un unique p-uplet $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$x \ = \ x_1 \cdot e_1 + \cdots + x_p \cdot e_p$$

  La base $\mathscr{B}_E$ étant fixée, le vecteur x est entièrement déterminé par la donnée du p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$, que l'on nomme **coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}_E$**.
- On appelle **vecteur (ou matrice) colonne associé à x dans la base $\mathscr{B}_E$** et on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(x) \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ le vecteur contenant les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}_E$. Autrement dit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

b) Isomorphisme de représentation

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.

Alors l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & E & \to & \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \\ & & x & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(x) \end{array}$$

est un isomorphisme de E dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Remarque

- Ce théorème stipule que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(\cdot)$ est un isomorphisme.
  En particulier, c'est une application linéaire. Ainsi :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in E^2, \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) \ = \ \lambda \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(x) + \mu \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(y)$$

- Une fois les base $\mathscr{B}_E$ fixée, ce théorème signifie que :
  - × tout vecteur x possède une unique représentation matricielle dans la base $\mathscr{B}_E$.
    (cela signifie simplement que φ est une application)
  - × réciproquement, toute matrice colonne de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est la représentation matricielle d'un unique vecteur de E.
    (c'est le caractère bijectif)
- Évidemment, si $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sont deux bases différentes de E, on obtient généralement des représentations matricielles $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(x)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(x)$ différentes pour x.

c) Matrice de passage

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ deux bases de E.

- On appelle **matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$** et on note $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, la matrice :

$$\boxed{P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1{}') \ \dots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_p{}')\Big)}$$

Autrement dit, la matrice obtenue par concaténation des vecteurs colonnes associés à e'_j dans la base $\mathscr{B}$.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ trois bases de E.

Soit $x \in E$. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$.

1. $X = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\ X'$ ou encore $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \ = \ P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)}$

2. $\boxed{P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}}$

3. La matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible et : $\boxed{(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}}$

V.2. Matrice associée à une application linéaire

a) Définition

Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.
On note $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.

On suppose que F est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
On note $\mathscr{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- On appelle **matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$** la matrice :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\big(f(e_1)\big) \ \dots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\big(f(e_p)\big)\Big)}$$

Autrement dit, la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ obtenue par concaténation des vecteurs colonnes associés à $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}_F$.

`À RETENIR`

Pour déterminer la matrice associée à une application linéaire f dans les bases $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathscr{B}_F$:

× on calcule l'image par f de chaque vecteur e_j de la base $\mathscr{B}_E$.

× on exprime les vecteurs $f(e_j)$ obtenus dans la base $\mathscr{B}_F$.

b) Matrice associée à un endomorphisme dans une nouvelle base

Soit E un ev de dimension finie.

Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On note $M = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, $N = Mat_{\mathscr{B}'}(f)$ et $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.

1) Alors : $\boxed{M = P\ N\ P^{-1}}$ ou encore : $\boxed{\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\ \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\ (P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1}}$

2) De manière générale :

Les matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables	$\Leftrightarrow$	M et N sont les matrices représentatives d'un même endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dans des bases différentes

c) Isomorphisme de représentation

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F.

1) Les applications :

$$\varphi : \begin{cases} \mathscr{L}(E,F) & \to & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & Mat_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{cases} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & Mat_{\mathscr{B}_E}(f) \end{cases}$$

sont des isomorphismes.

2) En particulier, on a :

$$\boxed{\dim(\mathscr{L}(E,F)) = np} \quad \text{et} \quad \boxed{\dim(\mathscr{L}(E)) = p^2}$$

Remarque

- Ce théorème stipule que $\text{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(\cdot)$ est un isomorphisme.
  En particulier, c'est une application linéaire. Ainsi :

  $$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x,y) \in \big(\mathscr{L}(E,F)\big)^2,\ \text{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(\lambda \cdot f + \mu \cdot g) \ = \ \lambda \cdot \text{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) + \mu \cdot \text{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g)$$

- Une fois les base $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ fixées, ce théorème signifie que :
  - × toute application linéaire f possède une unique représentation matricielle relativement aux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$.
    (cela signifie simplement que φ est une application)
  - × réciproquement, toute matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la représentation matricielle relativement aux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ d'une unique application linéaire φ.
    (c'est le caractère bijectif)
- On a déjà vu, en début de chapitre, que toute applicaiton linéaire de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ s'écrit sous forme matricielle. Lorsque E et F sont de dimensions finies, on se ramène à ce cas à l'aide des isomorphismes de représentations. On pourra retenir le schéma suivant :

  $$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \text{Mat}_{\mathscr{B}_E}(.) \Big\downarrow & & \Big\downarrow \text{Mat}_{\mathscr{B}_F}(.) \\ \mathscr{M}_{p1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R}) \end{array}$$

  et le slogan : « **à isomorphisme près**, une application linéaire n'est autre qu'une matrice ».

V.3. Lien entre opérations sur les applications linéaires et opérations sur les matrices associées

a) Noyau d'une application linéaire via la matrice associée

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

On note $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

Soient $x \in E$ et $y \in F$.

1. $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\Big(f(x)\Big) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(x)}$

2. $\boxed{y = f(x)\ \Leftrightarrow\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(y) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(x)}$

3. En particulier : $\boxed{x \in \mathrm{Ker}(f)\ \Leftrightarrow\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(x) = 0_F}$

Démonstration.

1. • Soit $x \in E$. On note $(x_1, \dots, x_p)$ les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$.

$$\begin{array}{rrcccccc} \text{Alors} & x & = & x_1 \cdot e_1 & + & \dots & + & x_p \cdot e_p \\ \text{et} & f(x) & = & x_1 \cdot f(e_1) & + & \dots & + & x_p \cdot f(e_p) \end{array}$$

Les coordonnées de x étant connues, le vecteur $f(x)$ est entièrement déterminé par l'image de la base $(e_1, \dots, e_p)$ par la fonction f.

• Comme $\mathscr{B}_F$ est une base de F, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, le vecteur $f(e_j)$ se décompose de manière unique sur cette base.
On note comme suit les décompositions obtenues :

$$\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & a_{11} \cdot f_1 + \dots + a_{n1} \cdot f_n \\ \vdots & & \vdots \\ f(e_p) & = & a_{1p} \cdot f_1 + \dots + a_{np} \cdot f_n \end{array}$$

Alors :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x_1 \cdot (a_{11} \cdot f_1 + \dots + a_{n1} \cdot f_n) \\ & + & \dots \\ & + & x_p \cdot (a_{1p} \cdot f_1 + \dots + a_{np} \cdot f_n) \\ & = & (a_{11}\ x_1 + \dots + a_{1p}\ x_p) \cdot f_1 \\ & + & \dots \\ & + & (a_{n1}\ x_1 + \dots + a_{np}\ x_p) \cdot f_n \end{array}$$

• Alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(f(x)) & = & \begin{pmatrix} a_{11}\ x_1 + \dots + a_{1p}\ x_p \\ a_{21}\ x_1 + \dots + a_{2p}\ x_p \\ \vdots \\ a_{n1}\ x_1 + \dots + a_{np}\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \\ & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(x) \end{array}$$

□

b) Composée d'applications linéaires et produit matriciel

Soient E, F, et G des vectoriels de dimensions finies.

On note $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ des bases respectives de E, F, et G.

1) Pour tout $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$:

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_G}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f)}$$

(la composition des applications linéaires correspond à la multiplication des matrices associées)

2) Pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}\left(f^k\right) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(f)\right)^k}$$

(où l'on a noté $f^k = f \circ \ldots \circ f$)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

On note $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.

1) $\boxed{f \text{ est bijective } \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ est inversible}}$

2) Si f est bijective alors : $\boxed{\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f^{-1}\right)}$

`MÉTHODO`

- Considérons un endomorphisme f et notons A sa représentation matricielle dans une base. Pour savoir si f est bijectif, il suffit de vérifier si A est inversible.
- On pourra notamment penser à appliquer l'algorithme du pivot de Gauss pour déterminer si A est inversible.

V.4. Lien entre le rang d'une application linéaire et le rang de la matrice associée

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

On note $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ base de F.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$\boxed{\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f)\right)}$$

`MÉTHODO`

Considérons un endomorphisme f et notons A sa représentation matricielle dans une base.
Pour déterminer le rang de f, on détermine le rang de A.

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

– Application réciproque d'un isomorphisme (page 5).
– Image d'une application linéaire en **dimension finie**. Énoncé et démonstration (page 9).
– Si $f \in \mathscr{L}(E)$, alors $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ (page 6) et $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$ (page 8).
– Démonstration qu'une application fournie par le colleur est linéaire / est un endomorphisme.

Exercices types

Les compétences attendues cette semaine sur ce chapitre sont les suivantes :

– savoir qu'une application linéaire est entièrement déterminée par son image sur une base.
$\hookrightarrow$ ce résultat est particulièrement utile lorsque l'exercice consiste à démontrer qu'il existe une application linéaire vérifiant certaines propriétés. Dans ce type d'exercice, il est classique d'avoir à travailler avec une base adaptée (qui peut être issue du théorème de la base incomplète).
– savoir ce qu'est une forme linéaire / un hyperplan (noyau d'une forme linéaire non nulle).
– savoir démontrer qu'une application $f : E \to F$ est linéaire (on n'oubliera pas de démontrer que l'application f est à valeurs dans F).
– savoir démontrer qu'une application $f : E \to E$ est un endomorphisme (on n'oubliera pas de démontrer que l'application f est à valeurs dans E).
– savoir déterminer le noyau d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Si E est de dimension finie, savoir déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.
– savoir déterminer l'image d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Si E est de dimension finie, savoir déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.
– savoir déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ (resp. $\mathrm{Im}(f)$) par application du théorème du rang (si E est de dimension finie !) en connaissant la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ (resp. $\mathrm{Ker}(f)$).
– savoir démontrer qu'une application $f : E \to F$ est un isomorphime / automorphisme dans le cas où E et F sont deux espaces vectoriels de même dimension.
– savoir appliquer les schémas de démonstration (démontrer une implication, une équivalence, une inclusion d'ensembles, une égalité d'ensembles ...).
$\hookrightarrow$ la plupart des exercices théoriques de ce chapitre ne sont que des mises en place de ces schémas de démonstration. Ainsi, rien ne peut légitimer ne pas savoir commencer une démonstration d'un exercice théorique.
Typiquement, si $f \in \mathscr{L}(E)$, savoir démontrer : $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.
– savoir déterminer la matrice colonne associée à un vecteur $x \in E$ dans une base $\mathscr{B}$ de E.
– savoir déterminer la matrice de passage d'une base $\mathscr{B}$ à une base $\mathscr{B}'$ ($P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$).
– savoir déterminer la matrice A représentative d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dans une base $\mathscr{B}$ de E.
– savoir déterminer la matrice B représentative d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dans une autre base $\mathscr{B}'$ de E. Connaître le lien entre A et B ($\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\ P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$).
– savoir déduire des propriétés de A celles de f.
($\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A)$; f bijective $\Leftrightarrow$ A inversible ; $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \Leftrightarrow A^2 = 0_{\mathscr{M}_p(\mathbb{R})}$)
– savoir calculer le rang d'une application linéaire, d'une matrice, à l'aide du pivot de Gauss.
– savoir caractériser les projecteurs et les symétries de E.

L'esprit du chapitre est que si E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ n'est, **à isomorphisme près**, qu'une application matricielle. Il est essentiel de savoir distinguer ces deux mondes (par exemple, si $E = \mathbb{K}_2[X]$, alors $E \cancel{=} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) tout en sachant utiliser les passerelles permettant le passage de l'un à l'autre. Il faut particulièrement veiller à ne pas commettre de confusions d'objets (elles seront lourdement sanctionnées).