

Colles

semaine 9 : 04 novembre - 09 novembre

I. Notion d'application linéaire

I.1. Définition

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels.

- Une application $f : E \rightarrow F$ est dite **linéaire** si :

$$\forall (x, y) \in E^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

(l'image d'une somme est la somme des images)

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E^2, f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$$

(l'image d'une multiplication par un scalaire est la multiplication scalaire de l'image)

- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.
- Lorsque $E = F$, on notera simplement $\mathcal{L}(E)$.
Une application linéaire de E dans E est appelée **endomorphisme** de E .
- **Caractérisation des applications linéaires.**

L'application $f : E \rightarrow F$ est linéaire

$$\Leftrightarrow \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in E^2, f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y)$$

$$\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y)$$

$$\Leftrightarrow \forall \mu \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, f(x + \mu \cdot y) = f(x) + \mu \cdot f(y)$$

(éviter ces 2 dernières caractérisations qui introduisent une dissymétrie de traitement des vecteurs x et y et masquent la notion de CL)

I.2. Propriétés

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire.

1) $f(0_E) = 0_F$

2) $\forall x \in E, f(-x) = -f(x)$

3) $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n,$

$$f(\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_n \cdot x_n) = \lambda_1 \cdot f(x_1) + \dots + \lambda_n \cdot f(x_n)$$

(l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images)

I.3. Exemple fondamental

Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Soit $h \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$.

Alors, il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que h s'écrit sous la forme :

$$h : \begin{array}{l} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X \mapsto MX \end{array}$$

Démonstration.

Notons $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $E = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Notons $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$ la base canonique de $F = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Le vecteur X se décompose de manière unique sur \mathcal{B}_E .
Autrement dit, il existe un unique p -uplet (x_1, \dots, x_p) tel que :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_p \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_p \cdot e_p$$

Par application de la fonction h , linéaire, on obtient :

$$h(X) = x_1 \cdot h(e_1) + \dots + x_p \cdot h(e_p)$$

Cette écriture met en avant une propriété des applications linéaires sur les ev de dimension finie : les valeurs $h(e_1), \dots, h(e_p)$ permettent de déterminer la valeur de $h(X)$.

Ainsi, f est entièrement déterminée par l'image de la base \mathcal{B}_E .

- Notons alors :

$$h(e_1) = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{n1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \dots \quad h(e_p) = \begin{pmatrix} m_{1p} \\ m_{2p} \\ \vdots \\ m_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

- Alors :

$$h(X) = \begin{pmatrix} m_{11} x_1 + \dots + m_{1p} x_p \\ m_{21} x_1 + \dots + m_{2p} x_p \\ \vdots \\ m_{n1} x_1 + \dots + m_{np} x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1p} \\ m_{21} & \dots & m_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = MX$$

où $M = (m_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}}$

□

II. Structure de l'ensemble des applications linéaires

II.1. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$

Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

- L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F est muni :

× d'une loi de composition interne, notée $+$

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$, pour tout $v \in \mathcal{L}(E, F)$, $u + v$ est l'application linéaire de E dans F définie par :

$$\begin{aligned} u + v : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto u(x) + v(x) \end{aligned}$$

× d'une loi de composition externe, notée \cdot

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot u$ est l'application linéaire de E dans F définie par :

$$\begin{aligned} \lambda \cdot u : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto \lambda \cdot u(x) \end{aligned}$$

- L'espace $\mathcal{L}(E, F)$ muni de $+$ et \cdot est un espace vectoriel.

II.2. Composition d'applications linéaires

a) Propriétés de la loi \circ

Soient E, F, G et H des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

$$1) \forall u \in \mathcal{L}(E), u \circ \text{id}_E = \text{id}_E \circ u = u.$$

Par ailleurs, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on introduit la notation :

$$\begin{cases} u^0 = \text{id}_E \\ \forall k \in \mathbb{N}, u^{k+1} = u^k \circ u (= u \circ u^k) \end{cases}$$

(La notation $u^2(x) = u(u(x))$ ne doit pas être confondue avec l'élevation au carré ! $u(x) \times u(x)$ n'a pas de sens dans le cadre d'espaces vectoriels)

$$2) \forall u \in \mathcal{L}(E, F), \forall v \in \mathcal{L}(F, G), v \circ u \in \mathcal{L}(E, G).$$

$$3) \forall u \in \mathcal{L}(E, F), \forall v \in \mathcal{L}(F, G), \forall w \in \mathcal{L}(G, H), w \circ (v \circ u) = (w \circ v) \circ u. \\ \text{(associativité de la loi } \circ \text{)}$$

b) Comportement de la loi \circ vis à vis des lois $+$ et \cdot

Soient E, F, G des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

$$1) \forall u \in \mathcal{L}(E, F), \forall (v_1, v_2) \in (\mathcal{L}(F, G))^2, (v_1 + v_2) \circ u = v_1 \circ u + v_2 \circ u. \\ \text{(distributivité à droite de la loi } \circ \text{ par rapport à la loi } + \text{)}$$

$$2) \forall (u_1, u_2) \in (\mathcal{L}(E, F))^2, \forall v \in \mathcal{L}(F, G), v \circ (u_1 + u_2) = v \circ u_1 + v \circ u_2. \\ \text{(distributivité à gauche de la loi } \circ \text{ par rapport à la loi } + \text{)}$$

$$3) \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in \mathcal{L}(E, F), \forall v \in \mathcal{L}(F, G), v \circ (\lambda \cdot u) = (\lambda \cdot v) \circ u = \lambda \cdot (v \circ u).$$

II.3. Notion d'isomorphisme, d'automorphisme

a) Définition

Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

- Une application $u : E \rightarrow F$ est un **isomorphisme de E dans F** si :

(i) $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

(ii) u est bijective.

S'il existe un isomorphisme de E dans F , on dit que E et F sont isomorphes.

- Une application $u : E \rightarrow E$ est un **automorphisme de E dans F** si :

(i) $u \in \mathcal{L}(E)$ (autrement dit, u est un endomorphisme de E).

(ii) u est bijective.

b) Notion d'application réciproque : rappels de première année

Soient E et F des ensembles (pas nécessairement des ev).

Soit $f : E \rightarrow F$ une application (pas nécessairement linéaire).

On suppose que f est bijective.

- On appelle **application réciproque de f** et on note $f^{-1} : F \rightarrow E$:

$$f^{-1} : F \rightarrow E$$

$$y \mapsto f^{-1}(y) \quad : \quad \text{l'unique antécédent de } y \text{ par l'application } f$$

Ainsi : $\forall x \in E, \forall y \in F, \quad \boxed{y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x}$

- Si $f : E \rightarrow F$ une application bijective, les propriétés suivantes sont vérifiées.

1. L'application f^{-1} est bijective et de réciproque f : $\boxed{(f^{-1})^{-1} = f}$

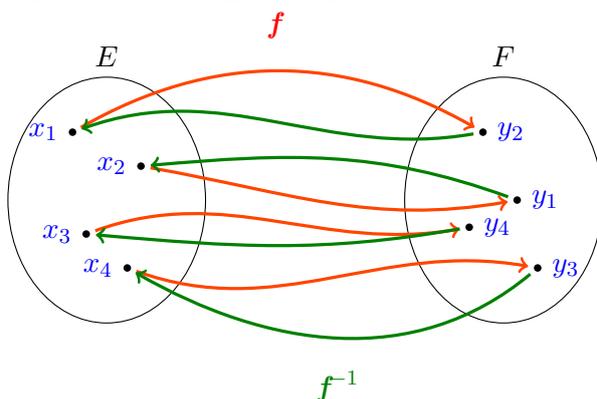
2. a) $\boxed{\forall y \in F, f(f^{-1}(y)) = y}$

b) $\boxed{\forall x \in E, f^{-1}(f(x)) = x}$

3. Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ sont deux applications, alors :

$$\left. \begin{array}{l} g \circ f = \text{id}_E \\ f \circ g = \text{id}_F \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{Les applications } f \text{ et } g \text{ sont bijectives et} \\ \text{réciproques l'une de l'autre :} \\ g = f^{-1} \quad \text{et} \quad f = g^{-1} \end{array}$$

Représentation graphique.



- Une application $f : E \rightarrow F$ bijective établit une correspondance un à un entre des éléments de E vers les éléments de F .
- Son application réciproque f^{-1} établit la même correspondance mais dans l'autre sens : des éléments de F vers les éléments de E .

c) Application réciproque d'un isomorphisme

Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que u est bijective.

(ainsi u est un isomorphisme de E dans F)

Alors l'application réciproque u^{-1} est un isomorphisme de F dans E .

(en particulier, $u^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$)

Démonstration.

- L'application $u^{-1} : F \rightarrow E$ est bijective en tant que réciproque de l'application $u : E \rightarrow F$ qui est elle-même bijective.

- Il reste à démontrer que $u^{-1} : F \rightarrow E$ est linéaire.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(y_1, y_2) \in F^2$.

L'application u étant surjective :

× il existe $x_1 \in E$ tel que : $y_1 = u(x_1)$. Ce qu'on peut aussi écrire : $x_1 = u^{-1}(y_1)$.

× il existe $x_2 \in E$ tel que : $y_2 = u(x_2)$. Ce qu'on peut aussi écrire : $x_2 = u^{-1}(y_2)$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} u^{-1}(\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2) &= u^{-1}(\lambda_1 \cdot u(x_1) + \lambda_2 \cdot u(x_2)) \\ &= u^{-1}(u(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2)) \\ &= \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \\ &= \lambda_1 \cdot u^{-1}(y_1) + \lambda_2 \cdot u^{-1}(y_2) \end{aligned}$$

Ainsi, $u^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$. □

Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$.

Supposons que u et v sont des isomorphismes.

- 1) Alors $v \circ u : E \rightarrow E$ est un automorphisme de E .

(on a notamment $v \circ u \in \mathcal{L}(E)$)

- 2) La réciproque de $v \circ u$ est donnée par : $(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}$

Démonstration.

- L'application $v \circ u$ est linéaire ($v \circ u \in \mathcal{L}(E)$) en tant que composée de deux applications linéaires.

- Il reste à démontrer que $v \circ u$ est bijective.

Démontrons que $f = v \circ u : E \rightarrow E$ admet pour réciproque $g = u^{-1} \circ v^{-1} : E \rightarrow E$.

$$\begin{aligned} g \circ f &= (u^{-1} \circ v^{-1}) \circ (v \circ u) & f \circ g &= (v \circ u) \circ (u^{-1} \circ v^{-1}) \\ &= u^{-1} \circ (v^{-1} \circ v) \circ u & &= v \circ (u \circ u^{-1}) \circ v^{-1} \\ &= u^{-1} \circ \text{id}_F \circ u & &= v \circ \text{id}_F \circ v^{-1} \\ &= u^{-1} \circ u & &= v \circ v^{-1} \\ &= \text{id}_E & &= \text{id}_E \end{aligned}$$

Ainsi f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre. □

III. Noyau et image d'une application linéaire

III.1. Noyau d'une application linéaire

a) Définition

Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- On appelle **noyau de f** et on note $\text{Ker}(f)$ le sous-ensemble de E défini par :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \{x \in E \mid f(x) = 0_F\} \\ &= \{\text{machin} \in E \mid f(\text{machin}) = 0_F\} \end{aligned}$$

- En particulier, on retiendra, pour tout $x \in E$: $x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x) = 0_F$

$$\forall \text{machin} \in E, \quad \text{machin} \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(\text{machin}) = 0_F$$

Exercice

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Démontrer : $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$.

Démonstration.

Soit $x \in \text{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0_E$.

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (f \circ f)(x) \\ &= f(f(x)) \\ &= f(0_E) \quad (\text{car } x \in \text{Ker}(f)) \\ &= 0_E \quad (\text{car } f \in \mathcal{L}(E, F)) \end{aligned}$$

Ainsi, $x \in \text{Ker}(f^2)$. □

b) Structure du noyau d'une application linéaire

Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration.

1) $\text{Ker}(f) \subseteq E$ par définition.

2) $\text{Ker}(f) \neq \emptyset$ car $0_E \in \text{Ker}(f)$. En effet : $f(0_E) = 0_F$.

3) Stabilité de $\text{Ker}(f)$ par combinaisons linéaires

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(x_1, x_2) \in (\text{Ker}(f))^2$.

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) &= \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) \quad (\text{par linéarité de } f) \\ &= \lambda_1 \cdot 0_F + \lambda_2 \cdot 0_F \quad (\text{car } (x_1, x_2) \in (\text{Ker}(f))^2) \\ &= 0_F \end{aligned}$$

Ainsi : $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \in \text{Ker}(f)$. □

c) Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire à l'aide de son noyau

Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0_E\}$$

Démonstration.

(\Rightarrow) Supposons f injective. Démontrons : $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

(\supset) Comme f linéaire, $f(0_E) = 0_F$. Ce qui démontre : $\text{Ker}(f) \supset \{0_E\}$.

(\subset) Soit $x \in \text{Ker}(f)$. Ainsi : $f(x) = 0_F = f(0_E)$.

L'application f étant injective, $x = 0_E$. Ce qui démontre : $x \in \{0_E\}$.

(\Leftarrow) Supposons que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$. Démontrons que f est injective.

Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$.

On a alors : $f(x) - f(y) = 0_F$, ce qui s'écrit : $f(x - y) = 0_F$.

Ainsi, $x - y \in \text{Ker}(f) = \{0_E\}$, d'où $x - y = 0_E$ et $x = y$. □

III.2. Image d'une application linéaire

a) Définition

Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- On appelle **image de f** et on note $\text{Im}(f)$ le sous-ensemble de F défini par :

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\} \\ &= \{f(x) \in F \mid x \in E\} \\ &= \{f(\text{truc}) \in F \mid \text{truc} \in E\} \end{aligned}$$

- En particulier, on retiendra, pour tout $y \in F$: $y \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow y = f(\dots)$

$$\forall \text{truc} \in F, \quad \text{truc} \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow \exists \text{bidule} \in E, \text{truc} = f(\text{bidule})$$

À RETENIR

Démontrer qu'un vecteur $y \in F$ est dans l'image de f , c'est l'écrire sous la forme :

$$y = f(\dots)$$

Exercice

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Démontrer : $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.

Démonstration.

Soit $y \in \text{Im}(f^2)$.

Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f^2(x)$.

Finalement :

$$\begin{aligned} y &= f^2(x) \\ &= f(f(x)) \end{aligned}$$

Ainsi, $y \in \text{Im}(f)$. □

b) Structure de l'image d'une application linéaire

Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F .

Démonstration.

1) $\text{Im}(f) \subseteq F$ par définition.

2) $\text{Im}(f) \neq \emptyset$ car $0_F \in \text{Im}(f)$. En effet : $0_F = f(0_E)$.

3) Stabilité de $\text{Im}(f)$ par combinaisons linéaires

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(y_1, y_2) \in (\text{Im}(f))^2$.

Ainsi, il existe $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que : $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 &= \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) \\ &= f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) \quad (\text{par linéarité de } f) \end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 \in \text{Im}(f)$. □

c) Caractérisation de la surjectivité d'une application

Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$f \text{ surjective} \Leftrightarrow \text{Im}(f) = F$$

IV. Applications linéaires en dimension finie

IV.1. Image d'une application linéaire en dimension finie

Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

On suppose que E est de dimension finie p et on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- 1) L'application f est entièrement déterminée par sa valeur sur \mathcal{B} .
Autrement dit, si l'on connaît la valeur de $f(e_1), \dots, f(e_p)$, on connaît la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in E$.
- 2) $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p))$

Démonstration.

(\subset) Soit $y \in \text{Im}(f)$.

Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Le vecteur x se décompose de manière unique sur \mathcal{B} .

Autrement dit, il existe un unique p -uplet (x_1, \dots, x_p) tel que $x = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_p \cdot e_p$.

Ainsi, par linéarité de f :

$$y = f(x) = x_1 \cdot f(e_1) + \dots + x_p \cdot f(e_p)$$

Ainsi, $y \in \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p))$.

(\supset) Soit $y \in \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p))$. Il existe alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$y = \lambda_1 \cdot f(e_1) + \dots + \lambda_p \cdot f(e_p) = f(\lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_p \cdot e_p)$$

Ainsi, $y \in \text{Im}(f)$. □

IV.2. Une première caractérisation de l'injectivité / surjectivité / bijectivité en dimension finie

Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

On suppose que E est de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Tout d'abord :

L'application f est injective
 \Leftrightarrow L'image par f de toute famille libre (finie) de E est une famille libre (finie) de F .

L'application f est surjective
 \Leftrightarrow L'image par f de toute famille génératrice (finie) de E est une famille génératrice (finie) de F .

L'application f est bijective
 \Leftrightarrow L'image par f de toute base (finie) de E est une base (finie) de F .

- On déduit de ce dernier résultat :

$\dim(E) = \dim(F) \Leftrightarrow$ Il existe une application linéaire bijective entre E et F

IV.3. Rang d'une application linéaire

a) Définition

Soit E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

On suppose que E est **de dimension finie**.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle rang de l'application f et on note $\text{rg}(f)$:

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$$

b) Théorème du rang

Soit E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

On suppose que E est **de dimension finie**.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1) Le sous-espace vectoriel $\text{Ker}(f)$ admet un supplémentaire dans E qui est isomorphe à $\text{Im}(f)$. Autrement dit :

$$\exists G \subset E, E = G \oplus \text{Ker}(f) \quad \text{où } G \text{ est un sev de } E \text{ tel que } \dim(G) = \dim(\text{Im}(f))$$

(on a même : $f(G) = \text{Im}(f)$)

2)

$$\begin{aligned} \dim(E) &= \dim(\text{ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) \\ &= \dim(\text{ker}(f)) + \text{rg}(f) \end{aligned}$$

c) Caractérisation de l'injectivité / surjectivité / bijectivité en dimension finie

Soit E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

On suppose que E et F sont de **de dimensions finies**.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors :

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow \text{rg}(f) = \dim(E)$$

$$f \text{ est surjective} \Leftrightarrow \text{rg}(f) = \dim(F)$$

Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie.

On suppose que $\dim(E) = \dim(F)$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors :

$$f \text{ est bijective} \Leftrightarrow f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective}$$

ou encore :

$$f \text{ est bijective} \Leftrightarrow \text{ker}(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow \text{rg}(f) = \dim(F)$$

IV.4. Formes linéaires et hyperplans

a) Définition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans \mathbb{K} .

b) Caractérisation des hyperplans de E en dimension finie

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Soit H un sous-espace vectoriel de E .

On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. H est un hyperplan de $E \Leftrightarrow \exists \varphi \in (\mathcal{L}(E, \mathbb{K})) \setminus \{0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{K})}\}, H = \text{Ker}(\varphi)$

2. Soient $\varphi_1 \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et $\varphi_2 \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ deux formes linéaires.

On suppose que ces formes linéaires sont non nulles.

$$\text{Ker}(\varphi_1) = \text{Ker}(\varphi_2) \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{K}^*, \varphi_1 = a \cdot \varphi_2$$

(autrement dit, deux formes linéaires définissent le même hyperplan ssi elles sont colinéaires)

V. Représentation matricielle de vecteurs et d'applications linéaires

V.1. Matrice colonne associée à un vecteur

a) Définition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

- Soit $x \in E$. Il existe un unique p -uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$x = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_p \cdot e_p$$

La base \mathcal{B}_E étant fixée, le vecteur x est entièrement déterminé par la donnée du p -uplet (x_1, \dots, x_p) , que l'on nomme **coordonnées de x dans la base \mathcal{B}_E** .

- On appelle **vecteur (ou matrice) colonne associé à x dans la base \mathcal{B}_E** et on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ le vecteur contenant les coordonnées de x dans la base \mathcal{B}_E . Autrement dit :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

b) Isomorphisme de représentation

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

Alors l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : E &\rightarrow \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ x &\mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de E dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Remarque

- Ce théorème stipule que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\cdot)$ est un isomorphisme. En particulier, c'est une application linéaire. Ainsi :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in E^2, \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x) + \mu \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(y)$$

- Une fois les base \mathcal{B}_E fixée, ce théorème signifie que :
 - × tout vecteur x possède une unique représentation matricielle dans la base \mathcal{B}_E .
(cela signifie simplement que φ est une application)
 - × réciproquement, toute matrice colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est la représentation matricielle d'un unique vecteur de E .
(c'est le caractère bijectif)
- Évidemment, si \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 sont deux bases différentes de E , on obtient généralement des représentations matricielles $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(x)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(x)$ différentes pour x .

c) Matrice de passage

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ deux bases de E .

- On appelle **matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}'** et on note $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$, la matrice :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \left(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1) \ \dots \ \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_p) \right)$$

Autrement dit, la matrice obtenue par concaténation des vecteurs colonnes associés à e'_j dans la base \mathcal{B} .

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Notons \mathcal{B} , \mathcal{B}' et \mathcal{B}'' trois bases de E .

Soit $x \in E$. On note $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$.

1. $X = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} X'$ ou encore $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$

2. $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}$

3. La matrice $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ est inversible et : $(P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$

V.2. Matrice associée à une application linéaire

a) Définition

Soit E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

On note $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

On suppose que F est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F .

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- On appelle **matrice de f relativement aux bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F** la matrice :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) = \left(\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_1)) \ \dots \ \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_p)) \right)$$

Autrement dit, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ obtenue par concaténation des vecteurs colonnes associés à $f(e_j)$ dans la base \mathcal{B}_F .

À RETENIR

Pour déterminer la matrice associée à une application linéaire f dans les bases $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ et \mathcal{B}_F :

- × on calcule l'image par f de chaque vecteur e_j de la base \mathcal{B}_E .
- × on exprime les vecteurs $f(e_j)$ obtenus dans la base \mathcal{B}_F .

b) Matrice associée à un endomorphisme dans une nouvelle base

Soit E un ev de dimension finie.
 Soit \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E .
 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, $N = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ et $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

1) Alors : $M = P N P^{-1}$ ou encore : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) (P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1}$

2) De manière générale :

Les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables \Leftrightarrow M et N sont les matrices représentatives d'un même endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ dans des bases différentes

c) Isomorphisme de représentation

Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions respectives $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
 On note \mathcal{B}_E une base de E et \mathcal{B}_F une base de F .

1) Les applications :

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f) \end{cases}$$

sont des isomorphismes.

2) En particulier, on a :

$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = np \quad \text{et} \quad \dim(\mathcal{L}(E)) = p^2$

Remarque

- Ce théorème stipule que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\cdot)$ est un isomorphisme. En particulier, c'est une application linéaire. Ainsi : $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall(x, y) \in (\mathcal{L}(E, F))^2, \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\lambda \cdot f + \mu \cdot g) = \lambda \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) + \mu \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(g)$
- Une fois les bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F fixées, ce théorème signifie que :
 - × toute application linéaire f possède une unique représentation matricielle relativement aux bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F .
(cela signifie simplement que φ est une application)
 - × réciproquement, toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la représentation matricielle relativement aux bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F d'une unique application linéaire φ .
(c'est le caractère bijectif)
- On a déjà vu, en début de chapitre, que toute application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ s'écrit sous forme matricielle. Lorsque E et F sont de dimensions finies, on se ramène à ce cas à l'aide des isomorphismes de représentations. On pourra retenir le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\cdot) \downarrow & & \downarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\cdot) \\ \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \end{array}$$

et le slogan : « **à isomorphisme près**, une application linéaire n'est autre qu'une matrice ».

V.3. Lien entre opérations sur les applications linéaires et opérations sur les matrices associées

a) Noyau d'une application linéaire via la matrice associée

Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies.

On note \mathcal{B}_E une base de E et \mathcal{B}_F une base de F .

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soient $x \in E$ et $y \in F$.

$$1. \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$$

$$2. \quad y = f(x) \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(y) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$$

$$3. \quad \text{En particulier : } x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x) = \mathbf{0}_F$$

Démonstration.

1. • Soit $x \in E$. On note (x_1, \dots, x_p) les coordonnées de x dans la base \mathcal{B} .

$$\begin{aligned} \text{Alors } x &= x_1 \cdot e_1 + \dots + x_p \cdot e_p \\ \text{et } f(x) &= x_1 \cdot f(e_1) + \dots + x_p \cdot f(e_p) \end{aligned}$$

Les coordonnées de x étant connues, le vecteur $f(x)$ est entièrement déterminé par l'image de la base (e_1, \dots, e_p) par la fonction f .

• Comme \mathcal{B}_F est une base de F , pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, le vecteur $f(e_j)$ se décompose de manière unique sur cette base.

On note comme suit les décompositions obtenues :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11} \cdot f_1 + \dots + a_{n1} \cdot f_n \\ &\vdots \\ f(e_p) &= a_{1p} \cdot f_1 + \dots + a_{np} \cdot f_n \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1 \cdot (a_{11} \cdot f_1 + \dots + a_{n1} \cdot f_n) \\ &+ \dots \\ &+ x_p \cdot (a_{1p} \cdot f_1 + \dots + a_{np} \cdot f_n) \\ &= (a_{11} x_1 + \dots + a_{1p} x_p) \cdot f_1 \\ &+ \dots \\ &+ (a_{n1} x_1 + \dots + a_{np} x_p) \cdot f_n \end{aligned}$$

• Alors :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(x)) &= \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + \dots + a_{1p} x_p \\ a_{21} x_1 + \dots + a_{2p} x_p \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \dots + a_{np} x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x) \end{aligned}$$

□

b) Composée d'applications linéaires et produit matriciel

Soient E , F , et G des vectoriels de dimensions finies.

On note \mathcal{B}_E , \mathcal{B}_F et \mathcal{B}_G des bases respectives de E , F , et G .

1) Pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$$

(la composition des applications linéaires correspond à la multiplication des matrices associées)

2) Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f^k) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f))^k$$

(où l'on a noté $f^k = f \circ \dots \circ f$)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.

On note \mathcal{B} une base de E .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E .

1) f est bijective $\Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible

2) Si f est bijective alors : $(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$

MÉTHODO

- Considérons un endomorphisme f et notons A sa représentation matricielle dans une base. Pour savoir si f est bijectif, il suffit de vérifier si A est inversible.
- On pourra notamment penser à appliquer l'algorithme du pivot de Gauss pour déterminer si A est inversible.

V.4. Lien entre le rang d'une application linéaire et le rang de la matrice associée

Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies.

On note \mathcal{B}_E une base de E et \mathcal{B}_F base de F .

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f))$$

MÉTHODO

Considérons un endomorphisme f et notons A sa représentation matricielle dans une base. Pour déterminer le rang de f , on détermine le rang de A .

VI. Polynômes d'endomorphismes, de matrices carrées

VI.1. Définition

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Il existe donc $r \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_r) \in \mathbb{K}^{r+1}$ tel que : $P(X) = \sum_{k=0}^r a_k X^k$.

1) Cas des endomorphismes

On note $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par $P(f) = \sum_{k=0}^r a_k f^k$.

C'est un polynôme d'endomorphismes.

2) Cas des matrices carrées

On note $P(A)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $P(A) = \sum_{k=0}^r a_k A^k$.

C'est un polynôme de matrices.

Lien entre les deux

Si \mathcal{B} est une base de E et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, on a alors : $P(A) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(f))$.

VI.2. Composée de polynômes d'endomorphismes

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$.

1) Cas des endomorphismes

$$(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$$

2) Cas des matrices carrées

$$(PQ)(A) = P(A) \times Q(A) = Q(A) \times P(A)$$

Lien entre les deux

Si \mathcal{B} est une base de E et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, on a alors :

$$(PQ)(A) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(f) \circ Q(f))$$

VI.3. Polynômes annulateurs

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1) Cas des endomorphismes

On dit que P est un polynôme annulateur de f si $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

2) Cas des matrices carrées

On dit que P est un polynôme annulateur de A si $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

3) Lien entre les deux

Si \mathcal{B} est une base de E et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, on a alors :

$$P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$$

ou encore :

$$P \text{ est un polynôme annulateur de } f \Leftrightarrow P \text{ est un polynôme annulateur de } A$$

Remarque

Considérons $E = \mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme dont la représentation matricielle dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Par calcul, on démontre : $A^2 + 2A - 3I = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

On en déduit que $P(X) = X^2 + 2X - 3$ est un polynôme annulateur de A (et donc de f).

Par ailleurs : $\frac{1}{3}(A + 2I)A = I$. Ainsi, A est inversible, d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{3}(A + 2I)$.

(et, par la passerelle matrice-endomorphisme, f est bijective de réciproque $\frac{1}{3}(f + 2\text{id}_E)$)

VI.4. Existence d'un polynôme annulateur non nul

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

Il existe un polynôme annulateur **non nul** de f .

2) Cas des matrices carrées

Il existe un polynôme annulateur **non nul** de A .

Remarque

- En fait, toute matrice de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à n (nous le verrons dans le chapitre réduction).
 - Un polynôme annulateur est, comme son nom l'indique, un **POLYNÔME**.
Si on parvient à démontrer, après calcul : $A^2 - I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ alors :
 - × $A^2 - I_n$ n'est **PAS** un polynôme ($(A^2 - A) \notin \mathbb{K}[X]$) mais une matrice.
 - × $A^2 - I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ n'est **PAS** un polynôme mais une proposition mathématique.
- Pour s'assurer de ne pas commettre de confusion, il est conseillé de nommer $P(X)$ (ou $Q(X)$ ou $R(X) \dots$) le polynôme annulateur que l'on demande d'exhiber. Ici, le polynôme $P(X) = X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de la matrice A .

VII. Matrices carrées par blocs et sous-espaces stables

VII.1. Matrices carrées par blocs

VII.1.a) Définition

- On appelle matrice carrée **par blocs** toute matrice A de la forme :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \xleftrightarrow{n_1} & \xleftrightarrow{n_2} & \dots & \xleftrightarrow{n_p} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,p} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,p} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{p,1} & A_{p,2} & \cdots & A_{p,p} \end{array} \right) \begin{array}{c} \updownarrow n_1 \\ \updownarrow n_2 \\ \vdots \\ \updownarrow n_p \end{array} \end{array}$$

$$\times (n_1, \dots, n_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$$

$$\text{où } \times \forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i, n_j}(\mathbb{K})$$

En particulier, les matrices diagonales qui apparaissent dans cette écriture sont carrées ($\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, A_{i,i} \in \mathcal{M}_{n_i, n_i}(\mathbb{K})$).

- Une telle matrice est notée : $A = (A_{i,j})_{1 \leq i, j \leq p}$.
C'est une matrice carrée : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $n = n_1 + \dots + n_p$.
- Une matrice carrée par blocs est dite :
 - × triangulaire supérieure **par blocs** si : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, (i > j \Rightarrow A_{i,j} = 0_{\mathcal{M}_{n_i, n_j}(\mathbb{K})})$.
 - × triangulaire inférieure **par blocs** si : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, (i < j \Rightarrow A_{i,j} = 0_{\mathcal{M}_{n_i, n_j}(\mathbb{K})})$.
 - × diagonale **par blocs** si : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, (i \neq j \Rightarrow A_{i,j} = 0_{\mathcal{M}_{n_i, n_j}(\mathbb{K})})$.

Remarque

- Toute matrice carrée peut s'écrire comme matrice carrée par blocs. Il suffit pour cela de fixer les blocs diagonaux. Les autres blocs s'en déduisent.
- Il n'y a pas unicité de la décomposition par blocs.

$$I_3 = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

VII.1.b) Manipulation des matrices par blocs

Soient $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$ et $B = (B_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$ deux matrices carrées par blocs de mêmes tailles.

Combinaisons linéaires et produits de matrices par blocs.

$$1) \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot A + \mu \cdot B = \left(\lambda \cdot A_{i,j} + \mu \cdot B_{i,j} \right)_{1 \leq i,j \leq p}$$

$$2) \quad AB = (C_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p} \text{ où } : \forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, \quad C_{i,j} = \sum_{k=1}^p A_{i,k} \times B_{k,j}$$

3) En particulier, si A et B sont triangulaires (resp. diagonales) par blocs alors :

× pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, $\lambda \cdot A + \mu \cdot B$ est triangulaire (resp. diagonales) par blocs.

× $A \times B$ est triangulaire (resp. diagonale) par blocs.

Dans le cas du produit de deux matrices triangulaires A et B (resp. diagonales) par blocs, les blocs diagonaux de $A \times B$ sont les produits des blocs diagonaux de A et B .

Cas des matrices triangulaires supérieures :

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & (*) & \cdots & (*) \\ (0) & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (*) \\ (0) & \cdots & (0) & \boxed{A_p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & (*) & \cdots & (*) \\ (0) & \boxed{B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (*) \\ (0) & \cdots & (0) & \boxed{B_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{A_1 \times B_1} & (*) & \cdots & (*) \\ (0) & \boxed{A_2 \times B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (*) \\ (0) & \cdots & (0) & \boxed{A_p \times B_p} \end{pmatrix}$$

Cas des matrices triangulaires inférieures :

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (*) & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (*) & \cdots & (*) & \boxed{A_p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (*) & \boxed{B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (*) & \cdots & (*) & \boxed{B_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{A_1 \times B_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (*) & \boxed{A_2 \times B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (*) & \cdots & (*) & \boxed{A_p \times B_p} \end{pmatrix}$$

Cas des matrices diagonales :

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \cdots & (0) & \boxed{A_p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & \boxed{B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \cdots & (0) & \boxed{B_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{A_1 \times B_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & \boxed{A_2 \times B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \cdots & (0) & \boxed{A_p \times B_p} \end{pmatrix}$$

VII.2. Sous-espace stable par un endomorphisme

VII.2.a) Définition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Soit F un sous-espace vectoriel de E .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- On dit que F est **stable** (ou **stabilisé**) par f si $f(F) \subset F$.

Autrement dit : F est stable par $f \Leftrightarrow \forall x \in F, f(x) \in F$.

- Si f stabilise F , la restriction de f à F est à valeurs dans F .
On appelle alors **endomorphisme induit** par f sur F la restriction de f à F au départ et à l'arrivée. Plus précisément, il s'agit de l'application :

$$f|_F : F \rightarrow F \\ x \mapsto f(x)$$

VII.2.b) Quelques sous-espaces stables en général

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Soient f et g deux endomorphismes de E .

Sous-espaces stables d'un endomorphisme

- 1) Les sous-espaces $\{0_E\}$, E , $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par f .
- 2) Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$:

$$\text{Ker}(P(f)) \text{ et } \text{Im}(P(f)) \text{ sont stables par } f$$

En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$ est stable par f

Stabilité de l'ensemble des endomorphismes qui stabilisent un sous-espace de E

Soit F un sous-espace vectoriel de E .

$$F \text{ est stable par } f \text{ et } g \Rightarrow \begin{cases} \bullet \text{ Pour tout } (\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}, F \text{ est stable par } \lambda \cdot f + \mu \cdot g \\ \bullet F \text{ est stable par } f \circ g \text{ et } g \circ f \end{cases}$$

Sous-espaces stables de deux endomorphismes qui commutent

$$f \text{ et } g \text{ commutent} \Rightarrow \begin{cases} \bullet \text{ Ker}(f) \text{ et } \text{Im}(f) \text{ sont stables par } g \\ \bullet \text{ Ker}(g) \text{ et } \text{Im}(g) \text{ sont stables par } f \end{cases}$$

VII.3. Caractérisations de la stabilité d'un sous-espace en dimension finie

VII.3.a) Matrice par blocs d'un endomorphisme qui stabilise un espace

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E .

On suppose que F est un espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

On note alors $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ une base (ou une famille génératrice) de F .

On note enfin $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_m)$ une base de E obtenue par complétion de la base \mathcal{B}_F .

$$1. \quad \begin{aligned} F \text{ est stable par } f &\Leftrightarrow \forall x \in F, f(x) \in F \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(e_k) \in F \end{aligned}$$

$$2. \quad F \text{ est stable par } f \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline (0) & C \end{array} \right) \text{ où } A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$$

De plus, dans ce cas, A est la matrice de l'endomorphisme induit $f|_F$ dans la base \mathcal{B}_F .

VII.3.b) Généralisation : matrice dans une base adaptée à des supplémentaires stables

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soient F_1, \dots, F_p des sous-espaces supplémentaires de E de dimensions finies.

Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ on note \mathcal{B}_i une base de F_i .

On note alors \mathcal{B} la base obtenue par concaténation des bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$.

(la base \mathcal{B} est une base adaptée à la décomposition $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$)

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, F_k \text{ est stable par } f \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & (0) & \dots & (0) \\ (0) & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \dots & (0) & \boxed{A_p} \end{pmatrix}$$

$$\text{où : } \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, A_k = \text{Mat}_{\mathcal{B}_k}(f|_{F_k}) \in \mathcal{M}_{\dim(F_k)}(\mathbb{K})$$

VII.3.c) Illustration classique : le cas des projecteurs et symétries

(i) Projecteurs et symétrie : définition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E ($E = F \oplus G$).

Ainsi, tout élément $x \in E$ se décompose de manière unique comme somme d'un élément de E et d'un élément de F .

On note alors $(x_F, x_G) \in F \times G$ l'unique couple de vecteurs tel que $x = x_F + x_G$.

- 1) On appelle alors projection sur F parallèlement à G , l'endomorphisme p :

$$p : E \rightarrow E \\ x \mapsto x_F$$

- 2) On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G , l'endomorphisme s :

$$s : E \rightarrow E \\ x \mapsto x_F - x_G$$

(ii) Caractérisation des projecteurs et symétries

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Propriété caractéristique

1) p est un projecteur de $E \Leftrightarrow p \circ p = p$
 $\Leftrightarrow E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$

Dans ce cas, l'endomorphisme p est le projecteur sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$.

2) s est une symétrie de $E \Leftrightarrow s \circ s = \text{id}_E$
 $\Leftrightarrow E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$

Dans ce cas, l'endomorphisme s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$.

Caractérisation par matrice représentative

1) p est un projecteur de $E \Leftrightarrow$ Il existe une base \mathcal{B} de E
telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n_1} & (0) \\ \hline (0) & (0) \end{array} \right)$

En particulier, si p est un projecteur : $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$.

La base \mathcal{B} est obtenue par concaténation :

- × d'une base de $\text{Im}(p)$ (espace vectoriel de dimension notée n_1),
- × et d'une base de $\text{Ker}(p)$.

2) s est une symétrie de $E \Leftrightarrow$ Il existe une base \mathcal{B} de E
telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n_1} & (0) \\ \hline (0) & -I_{n_2} \end{array} \right)$

La base \mathcal{B} est obtenue par concaténation :

- × d'une base de $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$ (espace vectoriel de dimension notée n_1),
- × et d'une base de $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$ (espace vectoriel de dimension notée n_2).

VIII. Trace et déterminant des endomorphismes et matrices carrées

VIII.1. Trace d'une matrice carrée et d'un endomorphisme

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Cas des matrices carrées

- On appelle **trace** de la matrice carrée A , et on note $\text{tr}(A)$, le scalaire obtenu par somme des coefficients diagonaux de A :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$$

- On définit alors l'application tr qui à chaque matrice carrée associe sa trace.

$$\begin{aligned} \text{tr} &: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K} \\ A &\mapsto \text{tr}(A) \end{aligned}$$

- L'application $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, est une forme linéaire non nulle.

- $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{tr}({}^t A) = \text{tr}(A)$

- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}), \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

Cas des endomorphismes

- On appelle **trace** de f , et on note $\text{tr}(f)$, la trace de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ où \mathcal{B} est une base de E . Le résultat ne dépend pas de la base \mathcal{B} choisie. En effet, si \mathcal{B}' est une base de E :

$$\begin{aligned} \text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) &= \text{tr}(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \times P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}) \\ &= \text{tr}(P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \times P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)) \\ &= \text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)) \end{aligned}$$

- L'application $\text{tr} : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathbb{K}$, est une forme linéaire non nulle.

- $\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E), \text{tr}(f \circ g) = \text{tr}(g \circ f)$

VIII.2. Déterminant (rappels)

VIII.2.a) Déterminant d'une matrice carrée

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **déterminant** et on note $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ l'unique application qui vérifie les propriétés suivantes (*existence et unicité sont admises*) :

- \times \det est n -linéaire relativement aux colonnes (resp. lignes) des matrices.
- \times \det est alternée relativement aux colonnes (resp. lignes) des matrices.
- \times $\det(I_n) = 1$.

VIII.2.b) Calcul en pratique du déterminant d'une matrice

Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriétés usuelles

$$1) \quad \det({}^t A) = \det(A) \qquad 2) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \det(A)$$

$$3) \quad \det(AB) = \det(BA) = \det(A) \times \det(B)$$

Formules explicites (cas $n \leq 2$ - cas triangulaire - cas non inversible)

$$1) \quad \det \left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1} \times a_{2,2} - a_{1,2} \times a_{2,1}$$

$$2) \quad \text{Si } A \text{ est triangulaire (ou diagonale), alors } \det(A) = \prod_{i=1}^n a_{i,i}.$$

$$3) \quad \begin{array}{l} \det(A) = 0 \Leftrightarrow A \text{ est non inversible} \\ \Leftrightarrow \text{Il existe une relation de dépendance linéaire entre les} \\ \text{colonnes (resp. lignes) de } A \end{array}$$

En particulier :

× si A a une colonne (resp. ligne) nulle, alors $\det(A) = 0$.

× si A possède deux lignes (resp. colonnes) colinéaires, alors $\det(A) = 0$.

× si l'une des colonnes (resp. lignes) de A s'exprime comme combinaison linéaire des autres colonnes de A (resp. lignes), alors $\det(A) = 0$.

On en déduit aussi : $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ est inversible

De plus, dans le cas où A est inversible : $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

Développement par rapport à une ligne/colonne (si $n \geq 2$)

Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$, on appelle mineur de position (i, j) et on note $\Delta_{i,j}(A)$ le déterminant de la matrice extraite de A en supprimant sa ligne i et sa colonne j .

1) Développement par rapport à la $i^{\text{ème}}$ ligne

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{i,k} \times \Delta_{i,k}(A)$$

2) Développement par rapport à la $j^{\text{ème}}$ colonne

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{k,j} \times \Delta_{k,j}(A)$$

Opérations élémentaires sur les lignes/colonnes et déterminant.

Pour calculer un déterminant d'une matrice carrée d'ordre supérieur à 3, on place un maximum de 0 (en procédant par opérations élémentaires) sur une ligne (resp. colonne) et on développe par rapport à celle-ci. On rappelle que :

× multiplier une ligne/colonne de A par α multiplie son déterminant par α .

× échanger deux lignes/colonnes de A multiplie son déterminant par -1 .

× ajouter à une ligne/colonne de A une combinaison linéaire des autres lignes/colonnes de A ne modifie pas son déterminant.

Remarque

- La notion de déterminant n'est définie que pour les matrices carrées.
- Comme écrit ci-dessus, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$, le mineur d'ordre n de la matrice A (noté $\Delta_{i,j}(A)$) est le déterminant de la matrice obtenu par suppression de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de A . Autrement dit, c'est le déterminant ci-dessous :

$$\left| \begin{array}{cccccc}
 a_{1,1} & \dots & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\
 \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{i-1,1} & \dots & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\
 \hline
 a_{i+1,1} & \dots & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\
 \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n}
 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccccc}
 a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\
 a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n}
 \end{array} \right|$$

VIII.2.c) Déterminant d'une famille de vecteur et déterminant d'un endomorphisme en dimension finie

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

On note \mathcal{B} une base de E .

Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ et soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$.

Cas des familles de vecteurs

- On appelle **déterminant** de la famille (u_1, \dots, u_n) dans la base \mathcal{B} , noté $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$, le déterminant de la matrice **carrée** $(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1) \dots \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_n))$.
(matrice obtenue par concaténation des matrices représentatives des vecteurs u_1, \dots, u_n dans la base \mathcal{B})

1) Une famille $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ est une base de $E \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0$

2) En particulier, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

Cas des endomorphismes

- On appelle **déterminant** de f , noté $\det(f)$, le déterminant de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ de f dans la base \mathcal{B} . Le résultat ne dépend pas de la base \mathcal{B} choisie.

En effet, si \mathcal{B}' est une base de E :

$$\begin{aligned}
 \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) &= \det(P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \times P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}) \\
 &= \det(P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}) \times \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)) \times \det(P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}) \\
 &= \det(P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}) \times \det(P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}) \times \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)) \\
 &= \det(P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}) \times \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)) \\
 &= \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)) \quad (\text{car } P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = I_n)
 \end{aligned}$$

1) $\det(\text{id}_E) = 1$ 2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda \cdot f) = \lambda^n \det(f)$

3) $\det(g \circ f) = \det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$

4) f est un automorphisme de $E \Leftrightarrow \det(f) \neq 0$

Si f est bijective, on a alors : $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$

Remarque

Si s une symétrie d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E , il existe une base \mathcal{B} telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n_1} & (0) \\ \hline (0) & -I_{n_2} \end{array} \right)$.

On en conclut : $\det(s) = (-1)^{n_2} = \begin{cases} 1 & \text{si } n_2 = \dim(\text{Ker}(s + \text{id}_E)) \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n_2 = \dim(\text{Ker}(s + \text{id}_E)) \text{ est impair} \end{cases}$

VIII.2.d) Déterminant d'une matrice triangulaire (resp. diagonale) par blocs

1) Le déterminant d'une matrice triangulaire (resp. diagonale) par blocs, le déterminant est le produit des déterminants des matrices (carrées) apparaissant dans la diagonale.

$$\begin{vmatrix} \boxed{A_1} & (*) & \cdots & (*) \\ (0) & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (*) \\ (0) & \cdots & (0) & \boxed{A_p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{A_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (*) & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (*) & \cdots & (*) & \boxed{A_p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{A_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \cdots & (0) & \boxed{A_p} \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^p \det(A_k)$$

2) **Application : déterminant d'un endomorphisme qui stabilise des sous-espaces supplémentaires**

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soient F_1, \dots, F_p des sous-espaces supplémentaires de E de dimensions finies.

Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ on note \mathcal{B}_i une base de F_i .

On note alors \mathcal{B} la base obtenue par concaténation des bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$.

(la base \mathcal{B} est une base adaptée à la décomposition $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$)

On suppose que f stabilise les sous-espaces F_1, \dots, F_p .

$$\det(f) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \begin{vmatrix} \boxed{A_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \cdots & (0) & \boxed{A_p} \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^p \det(A_k)$$

L'endomorphisme f est bijectif $\Leftrightarrow \det(f) \neq 0$

$\Leftrightarrow \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \neq 0$

$\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \det(A_k) \neq 0$

$\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \text{l'endomorphisme } f|_{A_k} \text{ est bijectif}$

À RETENIR

- Le déterminant d'une matrice (carrée) triangulaire par blocs apparaît comme une généralisation de la formule permettant le calcul d'une matrice carrée triangulaire.
- On retiendra que c'est LA SEULE FORMULE utilisable pour un calcul de déterminant par blocs. Toute autre tentative de généralisation est À PROSCRIRE. Une formule inventée sera forcément fautive et risque en plus de faire apparaître des déterminants non valides (on ne peut calculer le déterminant d'une matrice non carrée!).

Informations concernant cette semaine de colles

Questions de cours

- Image d'une application linéaire en **dimension finie**. Énoncé et démonstration (page 9).
- Si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ (page 6) et $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ (page 8).
- Démonstration qu'une application fournie par le colleur est linéaire / est un endomorphisme.
- Détermination de la matrice représentative d'un endomorphisme dans une base donnée et calcul du déterminant et de la trace de cet endomorphisme.

Exercices types

Les compétences attendues cette semaine sur ce chapitre sont les suivantes :

- savoir qu'une application linéaire est entièrement déterminée par son image sur une base.
 \leftrightarrow ce résultat est particulièrement utile lorsque l'exercice consiste à démontrer qu'il existe une application linéaire vérifiant certaines propriétés. Dans ce type d'exercice, il est classique d'avoir à travailler avec une base adaptée (qui peut être issue du théorème de la base incomplète).
- savoir ce qu'est une forme linéaire / un hyperplan (noyau d'une forme linéaire non nulle).
- savoir démontrer qu'une application $f : E \rightarrow F$ est linéaire (on n'oubliera pas de démontrer que l'application f est à valeurs dans F).
- savoir démontrer qu'une application $f : E \rightarrow E$ est un endomorphisme (on n'oubliera pas de démontrer que l'application f est à valeurs dans E).
- savoir déterminer le noyau d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
 Si E est de dimension finie, savoir déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
 En déduire la dimension de $\text{Ker}(f)$.
- savoir déterminer l'image d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
 Si E est de dimension finie, savoir déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
 En déduire la dimension de $\text{Im}(f)$.
- savoir déterminer la dimension de $\text{Ker}(f)$ (resp. $\text{Im}(f)$) par application du théorème du rang (si E est de dimension finie!) en connaissant la dimension de $\text{Im}(f)$ (resp. $\text{Ker}(f)$).
- savoir démontrer qu'une application $f : E \rightarrow F$ est un isomorphisme / automorphisme dans le cas où E et F sont deux espaces vectoriels de même dimension.
- savoir appliquer les schémas de démonstration (démontrer une implication, une équivalence, une inclusion d'ensembles, une égalité d'ensembles ...).
 \leftrightarrow la plupart des exercices théoriques de ce chapitre ne sont que des mises en place de ces schémas de démonstration. Ainsi, rien ne peut légitimer ne pas savoir commencer une démonstration d'un exercice théorique.
 Typiquement, si $f \in \mathcal{L}(E)$, savoir démontrer : $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.
- savoir déterminer la matrice colonne associée à un vecteur $x \in E$ dans une base \mathcal{B} de E .
- savoir déterminer la matrice de passage d'une base \mathcal{B} à une base \mathcal{B}' ($P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$).
- savoir déterminer la matrice A représentative d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ dans une base \mathcal{B} de E .
- savoir déterminer la matrice B représentative d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ dans une autre base \mathcal{B}' de E . Connaître le lien entre A et B ($\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$).
- savoir déduire des propriétés de A celles de f .
 $(\text{rg}(f) = \text{rg}(A) ; f \text{ bijective} \Leftrightarrow A \text{ inversible} ; f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow A^2 = 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R})})$
- savoir calculer le rang d'une application linéaire, d'une matrice, à l'aide du pivot de Gauss.
- savoir déterminer un polynôme annulateur à l'aide d'une égalité liant les puissances d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

- savoir obtenir la bijection réciproque d'un endomorphisme (resp. l'inverse d'une matrice carrée) à l'aide d'un polynôme annulateur à coefficient constant non nul.
- savoir manipuler des matrices par blocs (savoir notamment effectuer un produit par blocs et connaître le cas des matrices triangulaires par blocs).
- savoir démontrer qu'un endomorphisme stabilise un sous-espace de E .
- savoir écrire la matrice d'un endomorphisme dans une base adaptée lorsque l'espace vectoriel E s'écrit comme somme de sous-espaces supplémentaires.
- savoir caractériser les projecteurs et les symétries de E .
- savoir calculer la trace d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée et connaître les propriétés de cet opérateur.
- savoir calculer le déterminant d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée et connaître les propriétés de cet opérateur.
- savoir déterminer le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs et savoir que c'est LA SEULE FORMULE pour les calculs de déterminant par blocs.

L'esprit du chapitre est que si E et F sont des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies, une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ n'est, **à isomorphisme près**, qu'une application matricielle. Il est essentiel de savoir distinguer ces deux mondes (par exemple, si $E = \mathbb{K}_2[X]$, alors $E \not\cong \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) tout en sachant utiliser les passerelles permettant le passage de l'un à l'autre. Il faut particulièrement veiller à ne pas commettre de confusions d'objets (elles seront lourdement sanctionnées).