Colles

semaine 19 : 10 mars - 14 mars - PCSI

I. Questions de cours

I.1. Démontrer une inégalité par convexité

Exercice 1

1. ***a)*** Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x + 1$.

b) Tracer la courbe représentative de la fonction exp sur $\mathbb{R}$.

2. ***a)*** Démontrer : $\forall x \in \,]0, +\infty[$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.

b) En déduire : $\forall x \in \,]-1, +\infty[$, $\ln(x + 1) \leqslant x$.

c) Tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \ln(x + 1)$ sur $]-1, +\infty[$.

3. ***a)*** Démontrer : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) \geqslant \dfrac{2}{\pi}\, x$.

b) Tracer la courbe représentative de la fonction sin sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$.

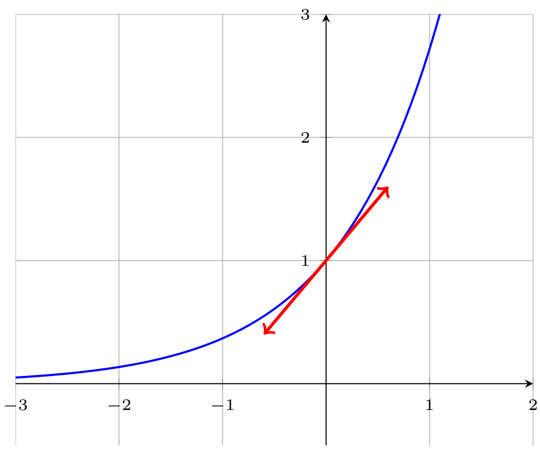
Démonstration.

1. ***a)*** La fonction $f : x \mapsto \exp$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
Sa courbe représentative est donc située au-dessus de ses tangentes, notamment de celle au point d'abscisse 0 qui n'est autre que la droite d'équation :

$$\begin{aligned} y &= f(0) + f'(0)\,\big(x - 0\big) \\ &= e^0 + e^0\, x \qquad \textit{(car } \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x\textit{)} \\ &= 1 + x \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant x + 1.}$$

b) Afin de tracer la courbe représentative de $f : x \mapsto e^x$, on commence par tracer sa tangente au point d'abscisse 0.



2. ***a)*** La fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0, +\infty[$.
Sa courbe représentative est donc située au-dessous de ses tangentes, notamment de celle au point d'abscisse 1 qui n'est autre que la droite d'équation :

$$\begin{aligned} y &= f(1) + f'(1)\ (x-1) \\ &= \cancel{\ln(1)} + \frac{1}{1}\ (x-1) \qquad \textit{(car } \forall x > 0,\ f'(x) = \frac{1}{x}\textit{)} \\ &= x - 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in\ ]0, +\infty[,\ \ln(x)\ \leqslant\ x - 1.}$$

b) D'après la question précédente :

$$\forall u \in\ ]0, +\infty[,\ \ln(u)\ \leqslant\ u - 1 \tag{$*$}$$

Soit $x \in\ ]-1, +\infty[$. En appliquant la propriété $(*)$ en $u = x + 1 > 0$, on obtient :

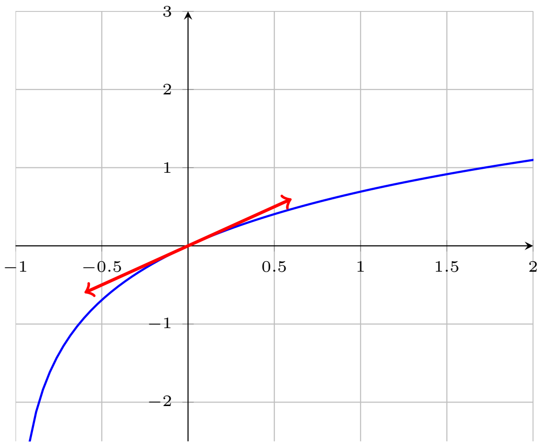
$$\ln(x+1)\ \leqslant\ x$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in\ ]-1, +\infty[,\ \ln(x+1)\ \leqslant\ x.}$$

Commentaire

- Il est aussi possible de démontrer cette inégalité en étudiant la fonction $f : x \mapsto \ln(x+1)$. Comme f est concave sur $]-1, +\infty[$, la courbe représentative de f est située en dessous de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 0 qui n'est autre que la droite d'équation $y = x$.
- L'énoncé demande explicitement de déduire le résultat de la question précédente ce qui valide la rédaction du corrigé et écarte celle mentionnée dans le point précédent.

c) Afin de tracer la courbe représentative de $f : x \mapsto \ln(x+1)$, on commence par tracer sa tangente au point d'abscisse 0.

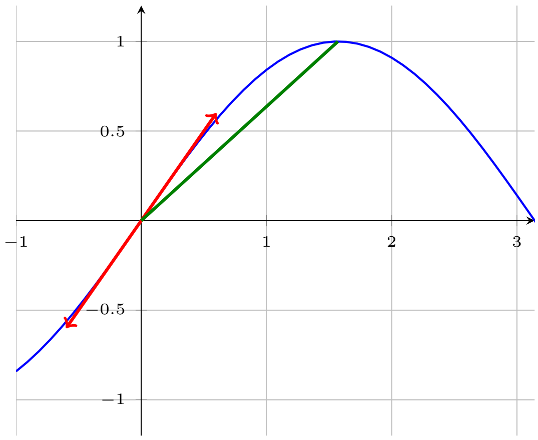


3. ***a)*** La fonction $f : x \mapsto \sin(x)$ est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Sa courbe représentative est donc située au-dessus de ses cordes, notamment de celle qui relie les points $(0, f(0))$ $(= (0,0))$ et $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ $(= (\frac{\pi}{2}, 1))$.
C'est la droite d'équation :

$$y\ =\ \frac{2}{\pi}\ x$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\ \sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi}\ x.}$$

b) Afin de tracer la courbe représentative de $f : x \mapsto \sin(x)$, on commence par tracer sa tangente au point d'abscisse 0.



$\square$

I.2. Formule de Leibniz

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Soit $m \in \mathbb{N}$.

On suppose que f et g sont toutes les deux de classe $\mathscr{C}^m$ sur I.

La fonction $f \times g$ est de classe $\mathscr{C}^m$ sur I et :

$$\boxed{(f \times g)^{(n)} \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ f^{(n-k)} \times g^{(k)}} \qquad \textit{(Formule de Leibniz)}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\forall x \in I, \ (f \times g)^{(n)}(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ f^{(n-k)}(x) \times g^{(k)}(x)} \qquad \textit{(Formule de Leibniz)}$$

Démonstration.

On suppose que les fonctions f et g sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n) : (f \times g)^{(n)} \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \ g^{(n-k)}$.

▸ **Initialisation** :

- D'une part : $(f \times g)^{(0)} = f \times g$
- D'autre part : $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(k)} \ g^{(0-k)} = \binom{0}{0} f^{(0)} \ g^{(0)} = f \times g$.

D'où $\mathscr{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (c'est-à-dire : $(f \times g)^{(n+1)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}\, g^{(n-k)}$).

$$\begin{aligned}
&(f \times g)^{(n+1)} \\
=\;& \Big((f \times g)^{(n)} \Big)' \\
=\;& \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)} \right)' && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
=\;& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} \times g^{(n-k)}\right)' \\
=\;& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} \times g^{(n-k)} + f^{(k)} \times g^{(n-k+1)}\right) && \textit{(par dérivée d'un produit)} \\
=\;& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} \times g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} && \textit{(par linéarité de la somme)} \\
=\;& \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} \times g^{(n-(k-1))} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} && \textit{(par décalage d'indice dans la } 1^{\text{ère}} \textit{ somme)} \\
=\;& \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)} \times g^{(n-(k-1))} \right) + \binom{n}{n} f^{(n+1)} \times g^{(0)} \\
+\;& \binom{n}{0} f^{(0)} \times g^{(n+1)} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} \right) && \textit{(en isolant dans chacune des sommes les termes d'indices communs)} \\
=\;& f^{(0)} g^{(n+1)} + \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} \right) + f^{(n+1)} g^{(0)} \\
=\;& f^{(0)} \times g^{(n+1)} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} \right) + f^{(n+1)} \times g^{(0)} && \textit{(par formule du triangle de Pascal)} \\
=\;& \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} && \textit{(car } f^{(0)} g^{(n+1)} = \tbinom{n+1}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} \textit{ et } f^{(n+1)} g^{(0)} = \tbinom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)}\textit{)}
\end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$.

□

I.3. Développements limités usuels en 0

Rappelons tout d'abord la formule de Taylor-Young en 0.

> Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
> Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^m$ dans un voisinage de x_0.
> Alors :
> $$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}\Big((x-x_0)^m\Big)$$
> En particulier, lorsque $x_0 = 0$, on obtient :
> $$\boxed{f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k + \underset{x\to 0}{o}\Big(x^m\Big)}$$

Ce résultat permet d'obtenir le formulaire suivant :

Développements limités usuels en 0	Premiers termes
$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{o}\Big(x^m\Big)$	$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}\Big(x^3\Big)$
$\sin(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k\,\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x\to 0}{o}\Big(x^{2m+1}\Big)$	$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}\Big(x^3\Big)$
$\cos(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k\,\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x\to 0}{o}\Big(x^{2m}\Big)$	$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \underset{x\to 0}{o}\Big(x^4\Big)$
$\mathrm{sh}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x\to 0}{o}\Big(x^{2m+1}\Big)$	$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}\Big(x^3\Big)$
$\mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x\to 0}{o}\Big(x^{2m}\Big)$	$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \underset{x\to 0}{o}\Big(x^4\Big)$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{m} x^k + \underset{x\to 0}{o}\Big(x^m\Big)$	$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \underset{x\to 0}{o}\Big(x^3\Big)$
$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{m} \frac{x^k}{k} + \underset{x\to 0}{o}\Big(x^m\Big)$	$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}\Big(x^4\Big)$
$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1}\,\frac{x^k}{k} + \underset{x\to 0}{o}\Big(x^m\Big)$	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}\Big(x^4\Big)$
$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\,x^k + \underset{x\to 0}{o}\Big(x^m\Big)$	$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha\,x + \frac{\alpha\,(\alpha-1)}{2!}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\Big(x^2\Big)$

Remarque
La dernière formule est souvent utilisée lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$ ou $\alpha = -\frac{1}{2}$. On pourra retenir :

$$\boxed{\sqrt{1+x} \;=\; 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}\Big(x^2\Big)}$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x}} \;=\; 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\Big(x^2\Big)}$$

II. Exercices classiques

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}$.

1. *a)* Démontrer que f est paire sur $\mathbb{R}$.

b) Justifier que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et étudier ses variations.

c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\ell \in \mathbb{R}^+$.

d) Justifier que : $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Données numériques : $\mathrm{e}^{1/2} \simeq 1,65$ et $\mathrm{e} \simeq 2,72$ au centième près.

e) Montrer que : $\forall x \geqslant 0,\ |f'(x)| \leqslant f(x)$.
En déduire que : $\forall x \geqslant 0,\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

f) Vérifier : $f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \ell| \qquad \text{puis que} \qquad |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$$

c) En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ.

3. **Informatique**

a) Écrire une fonction **Python** `f` qui prend en entrée un réel `x` et qui calcule $f($`x`$)$.

b) En utilisant la fonction `f` précédente, écrire une fonction `SuiteU` qui prend en entrée un entier positif `n` et qui calcule $u_{\mathtt{n}}$.

c) En utilisant la fonction `SuiteU` précédente, comment peut-on obtenir à l'aide de **Python** une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près ?

Exercice 3

Pour tout entier n positif, on définit sur $[0,+\infty[$ la fonction f_n par :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ f_n(x) \ = \ \mathrm{e}^x + nx^2 - 3$$

1. ***a)*** Montrer que f_n est continue et dérivable sur son ensemble de définition.
Dresser son tableau de variations.

b) Donner l'équation de la tangente de f_n en 1.

c) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a exactement une solution positive, notée u_n.

d) Préciser la valeur de u_0. Dans la suite on supposera que $n \geqslant 1$.

e) Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0,1[$.

2. ***a)*** Montrer que : $\forall x \in]0,1[,\ f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis le sens de variation de la suite (u_n).

c) Montrer que (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

d) On suppose dans cette question que $\ell > 0$.
Calculer la limite de $\mathrm{e}^{u_n} + n\, u_n^2 - 3$ et en déduire une contradiction.

e) Donner enfin la valeur de ℓ.

f) Montrer que $\sqrt{\dfrac{n}{2}}\, u_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

III. Corrigés des exercices classiques

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}$.

1. ***a)*** Démontrer que f est paire sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(-x) \ = \ \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-2x}+1} \ = \ \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}}\ \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-2x}+1} \ = \ \frac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{2x}} \ = \ f(x)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction est paire sur } \mathbb{R}.}$$

□

b) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et étudier ses variations.

Démonstration.

- La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car est le quotient de :
  - × la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,
  - × la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}+1$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et **qui ne s'annule pas sur** $\mathbb{R}$.

  (en fait, on peut démontrer par une argumentation similaire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$)
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) \ = \ \frac{\mathrm{e}^x\ (\mathrm{e}^{2x}+1) - \mathrm{e}^x\ (2\ \mathrm{e}^{2x})}{(\mathrm{e}^{2x}+1)^2} \ = \ \frac{\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^x - 2\ \mathrm{e}^{3x}}{(\mathrm{e}^{2x}+1)^2} \ = \ \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{3x}}{(\mathrm{e}^{2x}+1)^2}$$

  Comme $(\mathrm{e}^{2x}+1)^2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{3x}$.

- Si $x > 0$, $3x > x$ et donc $e^{3x} > e^x$ par stricte croissance de la fonction exponentielle.
  Dans ce cas, $f'(x) < 0$.
  L'autre cas se déduit par parité de la fonction f.
- On en déduit le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

  Détaillons les différents éléments de ce tableau :
  × $f(0) = \dfrac{e^0}{e^0+1} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$,
  × $\dfrac{e^x}{e^{2x}+1} = \dfrac{e^x}{e^{2x}} \dfrac{1}{1+\frac{1}{e^{2x}}} = \dfrac{1}{e^x} \dfrac{1}{1+\frac{1}{e^{2x}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\ell \in \mathbb{R}^+$.

Démonstration.
Notons $g : x \mapsto f(x) - x$.
La fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par somme de fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On procède par disjonction de cas :

- Si $x < 0$: comme $f(x) > 0$, l'équation $f(x) = x$ n'admet pas de solution.
- Si $x \geqslant 0$: tout d'abord, $g'(x) = f'(x) - 1$.
  Or $f'(x) \leqslant 0$ donc $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ et la fonction g est strictement décroissante.
  La fonction g est :
  × continue sur $[0, +\infty[$,
  × strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.
  Elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $g([0, +\infty[)$. Or :
  $$g([0,+\infty[) = \,]\lim_{x\to+\infty} g(x),\ g(0)] = \,]-\infty,\ \frac{1}{2}]$$
  En effet :
  × $g(0) = f(0) - 0 = \dfrac{1}{2}$.
  × comme $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient : $g(x) = f(x) - x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
  Enfin, comme $0 \in \,]-\infty, \frac{1}{2}]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\ell \in \mathbb{R}^+$.

  $\boxed{\text{On en déduit que l'équation } f(x) = x \text{ admet une unique solution } \ell \in [0, +\infty[.}$ □

d) Justifier : $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Données numériques : $e^{1/2} \simeq 1,65$ et $e \simeq 2,72$ au centième près.

Démonstration.
Tout d'abord, remarquons :

× $g(0) \ = \ f(0) - 0 \ = \ \dfrac{1}{2} \ \geqslant \ 0$,

× $g(\ell) \ = \ f(\ell) - \ell \ = \ 0$,

× $g\left(\dfrac{1}{2}\right) \ = \ f\left(\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{2} \ = \ \dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{e^1+1} - \dfrac{1}{2} \ = \ \dfrac{2\ e^{\frac{1}{2}} - e - 1}{2\ (e+1)} \leqslant 0.$

En effet :
$2\ e^{\frac{1}{2}} - e - 1 \ \simeq \ 2 \times 1,65 - 2,72 - 1 \ = \ 3,3 - 3,72 \ = \ -0,42 \ \leqslant \ 0$
(les valeurs étant données au centième près, l'approximation obtenue est exacte au moins au dixième près)

On obtient donc : $g(0) \ \geqslant \ g(\ell) \ \geqslant \ g\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Ces trois éléments sont dans l'ensemble $]-\infty, \dfrac{1}{2}]$.

En appliquant $g^{-1} :]-\infty, \dfrac{1}{2}] \to \mathbb{R}^+$ de part et d'autre de l'inégalité, on obtient : $0 \ \leqslant \ \ell \ \leqslant \ \dfrac{1}{2}$.

Commentaire

On pouvait aussi tout simplement remarquer que, d'après la question précédente :
× $\ell \in \mathbb{R}^+$
× $\ell = f(\ell)$
Ainsi : $\ell = f(\ell) \in f(\mathbb{R}^+)$. Or $f(\mathbb{R}^+) =]0, \frac{1}{2}]$. Ainsi $\ell \in]0, \frac{1}{2}]$.

□

e) Montrer : $\forall x \geqslant 0, \ |f'(x)| \ \leqslant \ f(x)$.

En déduire : $\forall x \geqslant 0, \ |f'(x)| \ \leqslant \ \dfrac{1}{2}$.

Démonstration.
Soit $x \geqslant 0$.

- D'après la question ***1.b)*** :

$$f'(x) \ = \ \frac{e^x - e^{3x}}{1 + e^{2x}} \ \leqslant \ 0$$

On en déduit :

$$|f'(x)| \ = \ -f'(x) \ = \ \frac{e^{3x} - e^x}{1 + e^{2x}}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}|f'(x)| - f(x) &= \frac{e^{3x} - e^{x}}{(e^{2x}+1)^2} - \frac{e^{x}}{e^{2x}+1} \\ &= \frac{e^{3x} - e^{x} - e^{x} \times (e^{2x}+1)}{(e^{2x}+1)^2} \\ &= \frac{\cancel{e^{3x}} - e^{x} - \cancel{e^{3x}} - e^{x}}{(e^{2x}+1)^2} \\ &= \frac{-2\ e^{x}}{(e^{2x}+1)^2} \ \leqslant\ 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \geqslant 0,\ |f'(x)| \ \leqslant\ f(x).}$$

- Or, l'étude de la fonction f (question ***1.b)***) démontre qu'elle atteint son maximum en 0.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \geqslant 0,\ |f'(x)| \leqslant f(x) \leqslant f(0) = \frac{1}{2}.}$$

Commentaire

- Dans cette question, on démontre :

$$\forall x \geqslant 0,\ \left|f'(x)\right| \ \leqslant\ f(x)$$

Il n'est pas du tout usuel de procéder ainsi et il ne faut donc pas penser que comparer f' à f serait pertinent : ça ne l'est pas de manière générale.

- Une autre manière de démontrer :

$$\forall x \geqslant 0,\ |f'(x)| \ \leqslant\ \frac{1}{2}$$

serait de faire l'étude de la fonction $x \mapsto |f'(x)| - \frac{1}{2}$. Il est alors conseillé de commencer par étudier le signe de $|f'|$ afin de se débarrasser au plus tôt des valeurs absolues.

$\square$

f) Vérifier : $f(\left[0, \frac{1}{2}\right]) \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Démonstration.
La fonction f est continue et décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. On en déduit :

$$f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \ = \ \left[f\left(\frac{1}{2}\right),\ f(0)\right] \ = \ \left[\frac{e^{\frac{1}{2}}}{e+1},\ \frac{1}{2}\right] \ \subset \ \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

$$\boxed{\text{L'intervalle } \left[0, \tfrac{1}{2}\right] \text{ est stable par } f.}$$

$\square$

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$
où $\mathscr{P}(n) : u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

- **Initialisation** :
  $u_0 = 0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
  D'où $\mathscr{P}(0)$.
- **Hérédité** :
  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$
  (*i.e.* $u_{n+1} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$).
  Par définition, $u_{n+1} = f(u_n)$. Or :
  × par hypothèse de récurrence : $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
  × l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est stable par f.
  On obtient donc : $u_{n+1} = f(u_n) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right].}$$

□

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \ell| \ \leqslant\ \frac{1}{2}\ |u_n - \ell| \qquad \text{puis que} \qquad |u_n - \ell| \ \leqslant\ \frac{1}{2^{n+1}}$$

Démonstration.

- D'après les questions précédentes :
  × f est dérivable sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$,
  × $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right],\ |f'(x)| \ \leqslant\ \frac{1}{2}$.
  On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis :
  $$\forall (x, y) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^2,\ |f(y) - f(x)| \ \leqslant\ \frac{1}{2}\ |y - x|$$
  Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $y = u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $x = \ell \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on obtient :
  $$|f(u_n) - f(\ell)| \ \leqslant\ \frac{1}{2}\ |u_n - \ell|$$
  $$\boxed{\text{Et ainsi : } |u_{n+1} - \ell| \ \leqslant\ \tfrac{1}{2}\ |u_n - \ell|.}$$
- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$
  où $\mathscr{P}(n) : |u_n - \ell| \ \leqslant\ \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
  - **Initialisation** :
    $|u_0 - \ell| \leqslant \frac{1}{2}$ car u_0 et ℓ sont des éléments de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
    D'où $\mathscr{P}(0)$.

- ▸ **Hérédité** :
  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$
  ($i.e.$ $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+2}}$).
  D'après le résultat précédent : $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \ell|$.
  Or, par hypothèse de récurrence : $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
  En combinant ces deux résultats, on obtient :
  $$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}}$$
  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}.}$$ □

c) En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question précédente : $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Autrement dit :
  $$-\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant u_n - \ell \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$$
- Or :
  × $\dfrac{1}{2^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $2^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,
  × $-\dfrac{1}{2^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc, d'après le théorème d'encadrement, la suite $(u_n - \ell)$ est convergente de limite 0.

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (u_n) \text{ est convergente et de limite } \ell.}$$ □

3. **Informatique**

a) Écrire une fonction **Python** `f` qui prend en entrée un réel `x` et qui calcule $f(\mathtt{x})$.

Démonstration.

```python
import numpy as np

def f(x) :
    y = np.exp(x) / (np.exp(2*x) + 1)
    return y
```
□

b) En utilisant la fonction `f` précédente, écrire une fonction `SuiteU` qui prend en entrée un entier positif n et qui calcule u_n.

Démonstration.
On propose la fonction suivante :

```python
def SuiteU(n) :
    u = 0
    for i in range(n) :
        u = f(u)
    return u
```

□

c) En utilisant la fonction `SuiteU` précédente, comment peut-on obtenir à l'aide de **Python** une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près ?

Démonstration.
D'après la question ***2.b.***, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{1}{2^{n+1}} \leqslant 10^{-6}$, on obtiendra par transitivité : $|u_n - \ell| \leqslant 10^{-6}$. Or :

$$\begin{array}{rcll}
\dfrac{1}{2^{n+1}} \leqslant 10^{-6} & \Leftrightarrow & 2^{n+1} \geqslant 10^6 & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & \ln\left(2^{n+1}\right) \geqslant \ln\left(10^6\right) & \textit{(par croissance de la fonction } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & (n+1)\ \ln(2) \geqslant 6\ \ln(10) & \\
& \Leftrightarrow & n+1 \geqslant \dfrac{6\ \ln(10)}{\ln(2)} & \textit{(car } \ln(2) > 0\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & n \geqslant \dfrac{6\ \ln(10)}{\ln(2)} - 1 &
\end{array}$$

Pour $N = \left\lceil \dfrac{6\ \ln(10)}{\ln(2)} - 1 \right\rceil$ (et les entiers plus grands) on est donc assuré que :

$$|u_N - \ell| \leqslant 10^{-6}$$

ce qui signifie que u_N est une approximation de ℓ à 10^{-6} près.
Il suffit alors d'appeler la fonction `SuiteU` avec pour paramètre `N`.

```python
N = int(np.ceil(6 * np.log(10) / np.log(2) - 1))
u = SuiteU(N)
```

Notons l'utilisation de la fonction `int` qui permet de considérer la variable `N` non pas comme un réel (type `float`) mais comme un entier (type `int`). Sans cela, on ne peut pas appliquer la fonction `SuiteU` à cette variable `N`. □

Exercice 3
Pour tout entier n positif, on définit sur $[0, +\infty[$ la fonction f_n par :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ f_n(x) \ = \ \mathrm{e}^x + nx^2 - 3$$

1. a) Montrer que f_n est continue et dérivable sur son ensemble de définition.
Dresser son tableau de variations.

Démonstration.
La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \geqslant 0,\ f_n'(x) = \mathrm{e}^x + 2nx > 0$$

x	0	$+\infty$
Signe de $f_n'(x)$	$+$	
Variations de f_n	-2 $\nearrow$	$+\infty$

☐

b) Donner l'équation de la tangente de f_n en 1.

Démonstration.
La tangente de f_n en 1 a pour équation $y = f_n(1) + f_n'(1)\,(x-1)$.
Or : $f_n(1) = \mathrm{e}^1 + n - 3$ et $f_n'(1) = \mathrm{e}^1 + 2n$. Ainsi :

$$f_n(1) + f_n'(1)\,(x-1) = \mathrm{e}^1 + n - 3 + (\mathrm{e}^1 + 2n)\,(x-1) = -n - 3 + (\mathrm{e}^1 + 2n)\,x$$

$$\boxed{\text{La tangente de } f_n \text{ en 1 a pour équation } y = -(n+3) + (\mathrm{e}^1 + 2n)\,x.}$$

☐

c) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a exactement une solution positive, notée u_n.

Démonstration.
La fonction f_n est :
- × continue sur $[0, +\infty[$,
- × strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f_n([0, +\infty[) = [-2, +\infty[$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, } 0 \in [-2, +\infty[\text{ admet un unique antécédent}\\ u_n \in [0, +\infty[\text{ par la fonction } f_n.\end{array}}$$

☐

d) Préciser la valeur de u_0. Dans la suite on supposera que $n \geqslant 1$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{La fonction } f_0 : x \mapsto \mathrm{e}^x - 3 \text{ s'annule en } u_0 = \ln(3).}$$

☐

e) Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in]0,1[$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On a :
  - $\times$ $f_n(0) = -2 < 0$,
  - $\times$ $f_n(u_n) = 0$ par définition,
  - $\times$ $f_n(1) = \mathrm{e}^1 + n - 3 > 0$ car $n \geqslant 1$ et $\mathrm{e}^1 > 2,71$.

$$\boxed{f_n(0) < f_n(u_n) < f_n(1)}$$

- D'après la question ***1.d)***, la fonction f_n réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[-2,+\infty[$.
D'après le théorème de la bijection, $f_n^{-1} : [-2,+\infty[\to [0,+\infty[$ est strictement croissante sur $[-2,+\infty[$. En appliquant f_n^{-1}, on obtient alors :

$$\begin{array}{ccccc} f_n^{-1}\big(f_n(0)\big) & < & f_n^{-1}\big(f_n(u_n)\big) & < & f_n^{-1}\big(f_n(1)\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 0 & & u_n & & 1 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } 0 < u_n < 1.}$$

□

2. a) Montrer : $\forall x \in]0,1[,\ f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

Démonstration.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$.

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) \ = \ (\cancel{e^x} + (n+1)\,x^2 - \cancel{3}) - (\cancel{e^x} + n\,x^2 - \cancel{3}) \ = \ x^2 \ > \ 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \in]0,1[, \text{ on a : } f_{n+1}(x) > f_n(x).}$$

□

b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis le sens de variation de la suite (u_n).

Démonstration.

- Comme $u_{n+1} \in]0,1[$, on peut appliquer le résultat de la question précédente.

$$\boxed{\text{On obtient : } f_n(u_{n+1}) \ < \ f_{n+1}(u_{n+1}).}$$

$$\boxed{\text{En particulier, comme } f_{n+1}(u_{n+1}) = 0, \text{ alors : } f_n(u_{n+1}) \ < \ 0.}$$

- D'après la question ***1.d)***, la fonction f_n réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[-2,+\infty[$.
D'après le théorème de la bijection, $f_n^{-1} : [-2,+\infty[\to [0,+\infty[$ est strictement croissante sur $[-2,+\infty[$. En appliquant f_n^{-1}, on obtient alors :

$$\begin{array}{ccc} f_n^{-1}\big(f_n(u_{n+1})\big) & < & f_n^{-1}\big(f_n(u_n)\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ u_{n+1} & & u_n \end{array}$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est strictement décroissante.}}$$

Commentaire

- Cette question ***3.b)*** consiste en l'étude de la suite (u_n). On parle ici de « suite implicite » car on n'a pas accès à la définition explicite de la suite (u_n) mais simplement à la propriété qui permet de définir chacun de ses termes, à savoir :

  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est l'unique solution dans $[0, +\infty[$ de l'équation $f_n(x) = 0$

  On comprend alors que l'étude de (u_n) va passer par l'étude des propriétés de la fonction P_n.
- De cette définition, on tire la propriété : $\boxed{\forall m \in \mathbb{N},\ f_m(u_m) = 0}$.
  Cette propriété est au cœur de l'étude de la suite implicite (u_n).
  C'est de cette propriété dont on se sert ici (en $m = n$) pour démontrer la monotonie de la suite (u_n). Comme la suite (u_n) est définie de manière implicite, cette étude ne se réalise pas directement en étudiant la différence $u_{n+1} - u_n$. Il est par contre très classique de passer par l'inégalité :
  $$f_n(u_{n+1}) \ \leqslant\ f_n(u_n)$$
  et de conclure : $u_n \ \leqslant\ u_{n+1}$ à l'aide d'une propriété de f_n.

□

c) Montrer que (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

Démonstration.

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante et minorée par 1. Elle converge donc vers une limite } \ell \text{ qui vérifie } 0 \leqslant \ell \leqslant 1.}$

□

d) On suppose dans cette question que $\ell > 0$.
Calculer la limite de $\mathrm{e}^{u_n} + n\,u_n^2 - 3$ et en déduire une contradiction.

Démonstration.
Supposons : $\ell > 0$. Alors :

× $\mathrm{e}^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\ell}$,

× $n\,{u_n}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,\ell^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

On en déduit que $f_n(u_n) = \mathrm{e}^{u_n} + n\,u_n^2 - 3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$\boxed{\text{Or, par définition de } u_n \text{, on a : } f_n(u_n) = 0 \text{, ce qui contredit le calcul précédent.}}$

□

e) Donner enfin la valeur de ℓ.

Démonstration.

$\boxed{\text{D'après la question précédente, } \ell \leqslant 0 \text{. Comme de plus } 0 \leqslant \ell \leqslant 1 \text{, on a : } \ell = 0}$

□

f) Montrer que $\sqrt{\dfrac{n}{2}}\,u_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration.

- On a : $f_n(u_n) = 0 = \mathrm{e}^{u_n} + n\,u_n^2 - 3$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } n\,u_n^2 = 3 - \mathrm{e}^{u_n}.}$$

- On en déduit :

$$\frac{n}{2}\,u_n^2 = \frac{3-\mathrm{e}^{u_n}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{\frac{n}{2}}\,\sqrt{u_n^2} = \sqrt{\frac{3-\mathrm{e}^{u_n}}{2}}$$

Enfin, comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit : $\sqrt{\frac{n}{2}}\,u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{3-\mathrm{e}^0}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1$.

Commentaire

On a démontré :

$$\sqrt{\frac{n}{2}}\,u_n \;=\; \frac{u_n}{\sqrt{\frac{2}{n}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Ceci signifie que les suites (u_n) et $\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)$ ont même comportement asymptotique.

Autrement dit : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}$.

□