Colles

semaine 25 : 24 mars - 29 mars - PCSI

I. Questions de cours

Exercice 1

1. Énoncé et démonstration de la formule de Taylor pour les polynômes.
2. Que peut-on dire du degré de la somme de deux polynômes ? Du produit de deux polynômes ?

Démonstration.

1. □ Énoncé

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On note $n = \deg(P)$.Alors il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que : $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$$

En particulier, si $\alpha = 0$, on obtient : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$

□ Démonstration

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \forall P \in \mathbb{K}_n[X], P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$.► **Initialisation** : soit $P \in \mathbb{K}_0[X]$.

- D'une part :

$$\sum_{k=0}^0 \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k = \frac{P^{(0)}(\alpha)}{0!} (X - \alpha)^0 = P(\alpha)$$

- D'autre part, P est un polynôme constant. Ainsi : $P(X) = P(\alpha)$.

Ainsi : $P(X) = \sum_{k=0}^0 \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$.D'où $\mathcal{P}(0)$.► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $\forall P \in \mathbb{K}_{n+1}[X], P(X) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$).Soit $P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$.

- On remarque : $P' \in \mathbb{K}_n[X]$. Ainsi, par hypothèse de récurrence :

$$P'(X) = \sum_{k=0}^n \frac{(P')^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k+1)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$$

- On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\begin{aligned}
 P(X) &= \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k+1)}(\alpha)}{k!} \frac{1}{k+1} (X - \alpha)^{k+1} + \lambda \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k+1)}(\alpha)}{(k+1)!} (X - \alpha)^{k+1} + \lambda \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k + \lambda \quad (\text{par décalage d'indice}) \\
 &= (X - \alpha) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^{k-1} + \lambda
 \end{aligned}$$

- Enfin, en évaluant l'égalité précédente en α , on obtient :

$$P(\alpha) = (\alpha - \alpha) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (\alpha - \alpha)^{k-1} + \lambda = \lambda$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 P(X) &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k + \lambda \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k + P(\alpha) \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k + \frac{P^{(0)}(\alpha)}{0!} (X - \alpha)^0 \quad (\text{d'après le calcul de l'initialisation}) \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k
 \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$.

2. Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$:

$$\boxed{\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)} \quad \text{et} \quad \boxed{\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))}$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$:

$$\boxed{\deg(\lambda \cdot P) = \deg(P)}$$

□

Exercice 2

1. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = X^4 + 2$.

2. a) Relations coefficients / racines pour un polynôme scindé de degré 3.

b) **Application** : soit $a \in [0, 1]$.

Déterminer le signe des racines du polynôme P défini par : $P(X) = X^2 - 4X + 3a$.

Démonstration.

1. • La factorisation en irréductibles de $P(X) = X^4 + 2$ dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P(X) = \left(X - 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \left(X - 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) \left(X - 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{5\pi}{4}}\right) \left(X - 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{7\pi}{4}}\right)$$

Commentaire

- Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ revient à déterminer les racines complexes de P , ou encore résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 2 = 0$. Résolvons cette équation.

Cette étape peut s'effectuer au brouillon.

- Soit $z \in \mathbb{C}$.

Alors il existe $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tel que : $z = r e^{i\theta}$.

$$\begin{aligned}
 z^4 + 2 = 0 &\Leftrightarrow z^4 = -2 \\
 &\Leftrightarrow (r e^{i\theta})^4 = 2 e^{i\pi} \\
 &\Leftrightarrow r^4 e^{4i\theta} = 2 e^{i\pi} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 2 \\ 4\theta \equiv \pi [2\pi] \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} r = 2^{\frac{1}{4}} \\ \theta \equiv \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2} \right] \end{cases} \quad (\text{par injectivité de } x \mapsto x^4 \text{ sur } \mathbb{R}_+) \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} r = 2^{\frac{1}{4}} \\ \exists k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, \theta = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $z^4 + 2 = 0$ est donc :

$$\left\{ 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{4}}, 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{3\pi}{4}}, 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{5\pi}{4}}, 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{7\pi}{4}} \right\}$$

- On en déduit la factorisation en irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned}
 P(X) &= \left(X - 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{4}} \right) \left(X - 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{3\pi}{4}} \right) \left(X - 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{5\pi}{4}} \right) \left(X - 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{7\pi}{4}} \right) \\
 &= \left(X - 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{4}} \right) \left(X - 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{3\pi}{4}} \right) \left(X - 2^{\frac{1}{4}} e^{-i\frac{3\pi}{4}} \right) \left(X - 2^{\frac{1}{4}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) \\
 &= \left(X - 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{4}} \right) \left(X - 2^{\frac{1}{4}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) \times \left(X - 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{3\pi}{4}} \right) \left(X - 2^{\frac{1}{4}} e^{-i\frac{3\pi}{4}} \right) \\
 &= \left(X^2 - 2^{\frac{1}{4}} (e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}) X + 1 \right) \left(X^2 - 2^{\frac{1}{4}} (e^{i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{3\pi}{4}}) X + 1 \right) \\
 &= \left(X^2 - 2 \times 2^{\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) X + 1 \right) \left(X^2 - 2 \times 2^{\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) X + 1 \right) \\
 &= \left(X^2 - \mathbf{2} \times 2^{\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{2}}{\mathbf{2}} X + 1 \right) \left(X^2 + \mathbf{2} \times 2^{\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{2}}{\mathbf{2}} X + 1 \right) \\
 &= \left(X^2 - 2^{\frac{3}{4}} X + 1 \right) \left(X^2 - 2^{\frac{3}{4}} X + 1 \right)
 \end{aligned}$$

2. a) Soit P un polynôme de degré 3.

Il existe alors $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$.

$$\begin{aligned}
 P(X) &= a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \\
 &= a_3 \left(\frac{a_0}{a_3} + \frac{a_1}{a_3} X + \frac{a_2}{a_3} X^2 + \frac{a_3}{a_3} X^3 \right) \quad (\text{car comme } \deg(P) = 3, a_3 \neq 0) \\
 &= a_3 \left(\frac{a_0}{a_3} + \frac{a_1}{a_3} X + \frac{a_2}{a_3} X^2 + X^3 \right)
 \end{aligned}$$

Comme P est scindé, on peut noter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les racines (pas forcément distinctes) de P .

Comme $\frac{1}{a_3} P$ est unitaire alors :

$$\frac{1}{a_3} P = (X - \lambda_1) (X - \lambda_2) (X - \lambda_3)$$

Finalement :

$$\begin{aligned} P(X) &= a_3 ((X - \lambda_1) (X - \lambda_2) (X - \lambda_3)) \\ &= a_3 (X^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) X^2 + (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3) X - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) \\ &= a_3 X^3 - a_3 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) X^2 + a_3 (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3) X - a_3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \end{aligned}$$

Par identification des coefficients des deux expressions de P :

$$\begin{cases} a_3 = a_3 \\ a_2 = -a_3 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \\ a_1 = a_3 (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3) \\ a_0 = -a_3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \end{cases}$$

b) On note Δ le discriminant de P . Alors :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3a = 16 - 12a > 0 \quad (\text{car : } 0 \leq a \leq 1)$$

Le polynôme P admet donc exactement 2 racines réelles. On les note r_1 et r_2 . Alors :

$$\begin{aligned} P(X) &= (X - r_1) (X - r_2) \\ &= X^2 - r_2 X - r_1 X + r_1 r_2 \\ &= X^2 - (r_1 + r_2) X + r_1 r_2 \end{aligned}$$

Or, par définition : $P(X) = X^2 - 4X + 3a$.

En identifiant les coefficients des 2 expressions de P , on obtient :

$$\begin{cases} -(r_1 + r_2) = -4 \\ r_1 r_2 = 3a \end{cases}$$

- Comme $r_1 r_2 = 3a > 0$, alors r_1 et r_2 sont de même signe.
- Comme $r_1 + r_2 = 4 > 0$ et r_1 et r_2 sont de même signe, alors : $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$. □

Exercice 3

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

1. Démontrer : α racine de $P \Leftrightarrow (X - \alpha) \mid P$.
2. Factorisation en polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

Démonstration.

1. On procède par double implication.

($\Leftarrow$) Supposons que $X - \alpha$ divise P .

Alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $P(X) = (X - \alpha) Q(X)$. On obtient :

$$P(\alpha) = (\alpha - \alpha) Q(\alpha) = 0 \times Q(\alpha) = 0$$

On en déduit que α est racine de P .

($\Rightarrow$) Supposons que α est racine de P .

On effectue la division euclidienne de P par $X - \alpha$. Alors il existe un unique couple $(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que :

$$\begin{cases} P(X) = (X - \alpha)Q(X) + R(X) \\ \deg(R) < \deg(X - \alpha) = 1 \end{cases}$$

On en déduit : $\deg(R) \leq 0$. Autrement dit, il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que : $R(X) = c$.

On calcule :

$$P(\alpha) = \cancel{(\alpha - \alpha)Q(\alpha)} + R(\alpha) = 0 + R(\alpha) = c$$

Or α est racine de P donc : $c = P(\alpha) = 0$. Ainsi : $R(X) = 0_{\mathbb{K}[X]}$. D'où :

$$P(X) = (X - \alpha)Q(X)$$

On obtient bien : $(X - \alpha) \mid P$.

2. • Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

Supposons : $P \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$.

On note $\lambda \in \mathbb{K}$ le coefficient dominant de P .

On note $r \in \mathbb{N}^*$ le nombre de racines distinctes de P .

On note $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ ses racines **complexes** distinctes, de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_r$.

On peut factoriser P de manière unique, à l'ordre des facteurs près, sous la forme suivante :

$$P(X) = \lambda \prod_{k=1}^r (X - \alpha_k)^{m_k}$$

La relation précédente est appelée **factorisation en irréductibles** de P dans $\mathbb{C}[X]$.

• Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

Supposons : $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$.

On note $\lambda \in \mathbb{R}$ le coefficient dominant de P .

On note $r \in \mathbb{N}^*$ le nombre de racines distinctes de P .

On note $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ ses racines **réelles** distinctes, de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_r$.

Alors il existe $s \in \mathbb{N}^*$, $(n_1, \dots, n_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$ et $(\beta_1, \dots, \beta_s, \gamma_1, \dots, \gamma_s) \in \mathbb{R}^{2s}$ tels qu'on peut factoriser P de manière unique, à l'ordre des facteurs près, sous la forme suivante :

$$P(X) = \lambda \prod_{k=1}^r (X - \alpha_k)^{m_k} \times \prod_{\ell=1}^s (X^2 + \beta_\ell X + \gamma_\ell)^{n_\ell}$$

où :

× pour tout $\ell \in [1, s]$, le polynôme $X^2 + \beta_\ell X + \gamma_\ell$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$,

× les polynômes $X^2 + \beta_1 X + \gamma_1, \dots, X^2 + \beta_s X + \gamma_s$ sont distincts.

La relation précédente est appelée **factorisation en irréductibles** de P dans $\mathbb{R}[X]$. □

II. Exercices classiques

Exercice 4

Déterminer les racines carrées du nombre complexe $2 - i$.

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$.

• Supposons : $z^2 = 2 - i$.

× D'une part : $|z^2| = |2 - i| = \sqrt{5}$. Donc :

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = |z^2| = \sqrt{5} \quad (1)$$

× De plus, comme $z^2 = 2 - i$, alors :

$$2 - i = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$$

Par unicité de l'écriture algébrique, on en déduit :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 & (2) \\ 2xy = -1 & (*) \end{cases}$$

× D'après (1) et (2), on obtient :

$$(S) \begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{5} \end{cases}$$

Or :

$$(S) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ 2y^2 = \sqrt{5} - 2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2} \begin{cases} 2x^2 = \sqrt{5} + 2 \\ 2y^2 = \sqrt{5} - 2 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 2}{2}} \quad \text{OU} \quad x = -\sqrt{\frac{\sqrt{5} + 2}{2}} \\ y &= \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 2}{2}} \quad \text{OU} \quad y = -\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 2}{2}} \end{aligned}$$

× Or, d'après (*): $xy = -\frac{1}{2} < 0$. On note alors :

$$z_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 2}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 2}{2}}$$

On conclut :

$$z = z_0 \quad \text{OU} \quad z = -z_0$$

• Les complexes z_0 et $-z_0$ sont donc les seules solutions possibles de l'équation $z^2 = 2 - i$. Or cette équation complexe admet exactement deux solutions.

On en déduit que l'ensemble des solutions de $z^2 = 2 - i$ est :

$$\{z_0, -z_0\}$$

□

Exercice 5

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante : $z^2 - 3iz + i - 3 = 0$.

Démonstration.

- On note Δ le discriminant du polynôme P défini par : $P(X) = X^2 - 3iX + i - 3$.

$$\Delta = (-3i)^2 - 4 \times 1 \times (i - 3) = -9 - 4i + 12 = 3 - 4i$$

En notant δ une racine carrée de Δ , les solutions de l'équation étudiée sont :

$$\frac{3i + \delta}{2} \quad \text{et} \quad \frac{3i - \delta}{2}$$

- On souhaite donc déterminer une racine carrée de Δ .

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$.

× Supposons : $z^2 = 3 - 4i$.

- D'une part : $|z^2| = |3 - 4i| = 5$. Donc :

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = |z^2| = 5 \quad (1)$$

- De plus, comme $z^2 = 3 - 4i$, alors :

$$3 - 4i = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$$

Par unicité de l'écriture algébrique, on en déduit :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (2) \\ 2xy = -4 & (*) \end{cases}$$

- D'après (1) et (2), on obtient :

$$(S) \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Or :

$$(S) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2y^2 = 2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2} \begin{cases} 2x^2 = 8 \\ 2y^2 = 2 \end{cases}$$

Ainsi :

$$x = 4 \quad \text{OU} \quad x = -4$$

$$y = 1 \quad \text{OU} \quad y = -1$$

- Or, d'après (*) : $xy = -2 < 0$. On note alors :

$$\delta = 4 - i$$

On conclut :

$$z = \delta \quad \text{OU} \quad z = -\delta$$

× Les complexes δ et $-\delta$ sont donc les seules solutions possibles de l'équation $z^2 = 3 - 4i$. Or cette équation complexe admet exactement deux solutions.

On en déduit que les racines carrées de $\Delta = 3 - 4i$ sont δ et $-\delta$.

- On en déduit que les solutions de l'équation $z^2 - 3iz + i - 3 = 0$ sont :

$$z_1 = \frac{3i + \delta}{2} = \frac{3i + (4 - i)}{2} = 2 + i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{3i - \delta}{2} = \frac{3i - (4 - i)}{2} = -2 + 2i$$

□