Colles

semaine 25 : 24 mars - 29 mars - PCSI

I. Questions de cours

Exercice 1

1. Démontrer que l'ensemble F suivant est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

$$F \ = \ \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(X) - X\,P'(X) = 0_{\mathbb{K}[X]}\}$$

2. Que peut-on dire du degré de la somme de deux polynômes ? Du produit de deux polynômes ?

Démonstration.

1. *cf* Methodes_Espaces_Vectoriels.pdf

2. Pour tout $(P, Q) \in \big(\mathbb{K}[X]\big)^2$:

$$\boxed{\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)} \quad \text{et} \quad \boxed{\deg(P + Q) \leqslant \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)}$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$:

$$\boxed{\deg(\lambda \cdot P) = \deg(P)}$$

□

Exercice 2

1. Démontrer que la famille $\mathcal{F}$ suivante est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$\big((X-1)(X-2)(X-3),\ X(X-2)(X-3),\ X(X-1)(X-3),\ X(X-1)(X-2)\big)$$

2. Démontrer que l'ensemble :

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Démonstration.

1. *cf* Methodes_Espaces_Vectoriels.pdf

2. *cf* Methodes_Espaces_Vectoriels.pdf □

Exercice 3

1. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = X^4 + 2$.

2. *a)* Relations coefficients / racines pour un polynôme scindé de degré 3.

b) **Application** : soit $a \in [0, 1]$.
Déterminer le signe des racines du polynôme P défini par : $P(X) = X^2 - 4X + 3a$.

Démonstration.

1. • La factorisation en irréductibles de $P(X) = X^4 + 2$ dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P(X) \;=\; \left(X - 2^{\frac{1}{4}}\, \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\right) \left(X - 2^{\frac{1}{4}}\, \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}\right) \left(X - 2^{\frac{1}{4}}\, \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{4}}\right) \left(X - 2^{\frac{1}{4}}\, \mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{4}}\right)$$

Commentaire

- Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ revient à déterminer les racines complexes de P, ou encore résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 2 = 0$. Résolvons cette équation.
  Cette étape peut s'effectuer au brouillon.
- Soit $z \in \mathbb{C}$.
  Alors il existe $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tel que : $z = r\, \mathrm{e}^{i\theta}$.

$$\begin{aligned}
z^4 + 2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z^4 = -2 \\
&\Leftrightarrow \quad (r\, \mathrm{e}^{i\theta})^4 = 2\, \mathrm{e}^{i\pi} \\
&\Leftrightarrow \quad r^4\, \mathrm{e}^{4i\theta} = 2\, \mathrm{e}^{i\pi} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^4 = 2 \\ 4\theta \equiv \pi \ [2\pi] \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = 2^{\frac{1}{4}} \\ \theta \equiv \dfrac{\pi}{4} \ \left[\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases} \qquad \textit{(par injectivité de } x \mapsto x^4 \textit{ sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = 2^{\frac{1}{4}} \\ \exists k \in [\![0, 3]\!],\ \theta = \dfrac{\pi}{4} + k\, \dfrac{\pi}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $z^4 + 2 = 0$ est donc :

$$\{2^{\frac{1}{4}}\, \mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{4}},\ 2^{\frac{1}{4}}\, \mathrm{e}^{i\,\frac{3\pi}{4}},\ 2^{\frac{1}{4}}\, \mathrm{e}^{i\,\frac{5\pi}{4}},\ 2^{\frac{1}{4}}\, \mathrm{e}^{i\,\frac{7\pi}{4}}\}$$

- On en déduit la factorisation en irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned}
P(X) \;&=\; \left(X - 2^{\frac{1}{4}}\, \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\right) \left(X - 2^{\frac{1}{4}}\, \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}\right) \left(X - 2^{\frac{1}{4}}\, \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{4}}\right) \left(X - 2^{\frac{1}{4}}\, \mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{4}}\right) \\
&=\; \left(X - 2^{\frac{1}{4}}\, \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\right) \left(X - 2^{\frac{1}{4}}\, \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}\right) \left(X - 2^{\frac{1}{4}}\, \mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{4}}\right) \left(X - 2^{\frac{1}{4}}\, \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}\right) \\
&=\; \left(X - 2^{\frac{1}{4}}\, \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\right) \left(X - 2^{\frac{1}{4}}\, \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}\right) \times \left(X - 2^{\frac{1}{4}}\, \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}\right) \left(X - 2^{\frac{1}{4}}\, \mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{4}}\right) \\
&=\; \left(X^2 - 2^{\frac{1}{4}}\, (\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} + \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}})\, X + 1\right) \left(X^2 - 2^{\frac{1}{4}}\, (\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}} + \mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{4}})\, X + 1\right) \\
&=\; \left(X^2 - 2 \times 2^{\frac{1}{4}}\, \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\, X + 1\right) \left(X^2 - 2 \times 2^{\frac{1}{4}}\, \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\, X + 1\right) \\
&=\; \left(X^2 - \cancel{2} \times 2^{\frac{1}{4}}\, \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\, X + 1\right) \left(X^2 + \cancel{2} \times 2^{\frac{1}{4}}\, \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\, X + 1\right) \\
&=\; \left(X^2 - 2^{\frac{3}{4}}\, X + 1\right) \left(X^2 - 2^{\frac{3}{4}}\, X + 1\right)
\end{aligned}$$

2. a) Soit P un polynôme de degré 3.
Il existe alors $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$.

$$\begin{array}{rcl} P(X) & = & a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \\ & = & a_3 \left(\dfrac{a_0}{a_3} + \dfrac{a_1}{a_3}\ X + \dfrac{a_2}{a_3}\ X^2 + \dfrac{a_3}{a_3}\ X^3 \right) \qquad \textit{(car comme } \deg(P) = 3,\ a_3 \neq 0\textit{)} \\ & = & a_3 \left(\dfrac{a_0}{a_3} + \dfrac{a_1}{a_3}\ X + \dfrac{a_2}{a_3}\ X^2 + X^3 \right) \end{array}$$

Comme P est scindé, on peut noter λ_1, λ_2, λ_3 les racines (pas forcément distinctes) de P.
Comme $\dfrac{1}{a_3}\, P$ est unitaire alors :

$$\frac{1}{a_3}\, P \;=\; \big(X-\lambda_1\big)\;\big(X-\lambda_2\big)\;\big(X-\lambda_3\big)$$

Finalement :

$$\begin{array}{rcl} P(X) & = & a_3\;\Big(\big(X-\lambda_1\big)\;\big(X-\lambda_2\big)\;\big(X-\lambda_3\big)\Big) \\ & = & a_3\;\Big(X^3-\big(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\big)\;X^2+\big(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3\big)\;X-\lambda_1\lambda_2\lambda_3\Big) \\ & = & a_3\;X^3-a_3\;\big(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\big)\;X^2+a_3\;\big(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3\big)\;X-a_3\;\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{array}$$

Par identification des coefficients des deux expressions de P :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_3 & = & a_3 \\ a_2 & = & -a_3\;\big(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\big) \\ a_1 & = & a_3\;\big(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3\big) \\ a_0 & = & -a_3\;\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{array}\right.$$

b) On note Δ le discriminant de P. Alors :

$$\Delta \;=\; (-4)^2-4\times 1\times 3a \;=\; 16-12a \;>\; 0 \quad \textit{(car : } 0\leqslant a\leqslant 1\textit{)}$$

Le polynôme P admet dont exactement 2 racines réelles. On les note r_1 et r_2. Alors :

$$\begin{array}{rcl} P(X) & = & (X-r_1)\,(X-r_2) \\ & = & X^2-r_2X-r_1X+r_1r_2 \\ & = & X^2-(r_1+r_2)X+r_1r_2 \end{array}$$

Or, par définition : $P(X)=X^2-4X+3a$.
En identifiant les coefficients des 2 expressions de P, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -(r_1+r_2) & = & -4 \\ r_1\,r_2 & = & 3a \end{array}\right.$$

- Comme $r_1\,r_2=3a>0$, alors r_1 et r_2 sont de même signe.
- Comme $r_1+r_2=4>0$ et r_1 et r_2 sont de même signe, alors : $r_1>0$ et $r_2>0$. □