Colles

semaine 28 : 28 avril - 03 mai - PCSI

I. Questions de cours

Exercice 1

1. Définition de l'image réciproque d'un ensemble par une application.

2. Soient E, F, G des ensembles.
Soit $f : E \to F$ une application.
Soit $g : F \to G$ une application.

a) Démontrer : $\left.\begin{array}{l}\text{L'application } f : E \to F \text{ est injective} \\ \text{L'application } g : F \to G \text{ est injective}\end{array}\right\} \Rightarrow$ L'application $g \circ f : E \to G$ est injective .

b) Démontrer : L'application $g \circ f : E \to G$ est injective $\Rightarrow$ L'application $f : E \to F$ injective .

Démonstration.

1. Soient E et F deux ensembles.
Soit V une partie de F ($V \subset F$).
Soit $f : E \to F$.

- L'**image réciproque** de l'ensemble V par l'application f, noté $f^{-1}(V)$, est l'**ensemble** des éléments de E dont l'image est un élément de V :

$$\boxed{f^{-1}(V) = \{x \in E \mid f(x) \in V\}}$$

(en particulier, $f^{-1}(V)$ est une partie de E)

- La relation d'appartenance à l'ensemble $f^{-1}(V)$ est caractérisée par :

$$x \in f^{-1}(V) \Leftrightarrow f(x) \in V$$

2. Supposons que les applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont injectives.
Démontrons que l'application $g \circ f : E \to G$ est injective.
Il s'agit de démontrer : $\forall (x_1, x_2) \in E^2, g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$.

Supposons $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$

alors $g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big)$

donc $f(x_1) = f(x_2)$ *(car l'application g est injective)*

donc $x_1 = x_2$ *(car l'application f est injective)*

On en conclut que l'application $g \circ f : E \to G$ est injective.

3. Supposons que l'application $g \circ f : E \to G$ est injective.
Démontrons que l'application $f : E \to F$ est injective.
Il s'agit de démontrer : $\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$.

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$.

Supposons	$f(x_1) = f(x_2)$	
alors	$g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big)$	*(en composant à gauche et à droite par l'application f)*
donc	$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$	*(par définition de $g \circ f$)*
donc	$x_1 = x_2$	*(car l'application $g \circ f$ est injective)*

On en conclut que l'application $f : E \to F$ est injective.

□

Exercice 2

1. Soient E et F deux ensembles.
Soit V une partie de F ($V \subset F$).
Soit $f : E \to F$.
Démontrer : $f^{-1}\left(\overline{V}\right) = \overline{f^{-1}(V)}$.

2. Soient E, F et G des ensembles.
Soit $f : E \to F$ une application.
Soit $g : F \to G$ une application.

a) Démontrer : $\left.\begin{array}{l} f \text{ est surjective} \\ g \text{ est surjective} \end{array}\right\} \Rightarrow \; g \circ f : E \to G \text{ est surjective}$.

b) Démontrer : $g \circ f$ est surjective $\;\Rightarrow\;$ g surjective .

Démonstration.

1. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\overline{V}\right) \;&\Leftrightarrow\; f(x) \in \overline{V} \\ &\Leftrightarrow\; \texttt{NON}\big(f(x) \in V\big) \\ &\Leftrightarrow\; \texttt{NON}\Big(x \in f^{-1}(V)\Big) \\ &\Leftrightarrow\; x \in \overline{f^{-1}(V)} \end{aligned}$$

2. a) Supposons que les applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont surjectives.
Démontrons que l'application $g \circ f : E \to G$ est surjective.
Il s'agit de démontrer : $\forall z \in G, \exists x \in E, z = g \circ f(x)$.

Soit $z \in G$.

× Comme l'application $g : F \to G$ est surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$.

× Comme l'application $f : E \to F$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} z &= g(y) \\ &= g\big(f(x)\big) \\ &= g \circ f(x) \end{aligned}$$

Ainsi $g \circ f$ est surjective.

b) Supposons que l'application $g \circ f : E \to G$ est surjective.
Démontrons que l'application $g : F \to G$ est surjective.
Il s'agit de démontrer : $\forall z \in G,\ \exists y \in F,\ z = g(y)$.

Soit $z \in G$.
Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x)$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} z & = & g \circ f(x) \\ & = & g\big(f(x)\big) \end{array}$$

Notons $y = f(x)$. Alors $y \in F$ et y vérifie $z = g(y)$.

On en conclut que l'application $f : E \to F$ est surjective.

□

Exercice 3

1. Propriétés des lois $\cup$ et $\cap$.

2. Soient E et F deux ensembles.
Soit $f : E \to F$ et $g : F \to E$ des applications.
Démontrer :

$$\left.\begin{array}{l} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Les applications } f : E \to F \text{ et } g : F \to E \text{ sont bijectives.} \\ \text{De plus : } g = f^{-1} \text{ et } f = g^{-1}. \end{array}$$

Démonstration.

1. Soit E un ensemble.
Soient A, B et C des parties de E ($A \subset E$, $B \subset E$, $C \subset E$).

(i) $\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$ *(la loi $\cap$ est distributive par rapport à la loi $\cup$)*

(ii) $\boxed{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$ *(la loi $\cup$ est distributive par rapport à la loi $\cap$)*

(iii) $\boxed{\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}}$ et $\boxed{\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}}$ *(lois de de Morgan)*

(iv) $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$

2. Supposons : $\left\{\begin{array}{l} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{array}\right.$.

- Démontrons d'abord que l'application $f : E \to F$ est bijective.
  Pour ce faire, on démontre qu'elle est injective et surjective.
  - Par hypothèse :
  $$g \circ f = \mathrm{id}_E$$
  Or, l'application id_E est bijective. En particulier, elle est injective.
  Ainsi, l'application $g \circ f : E \to E$ est injective. On en conclut (résultat démontré en ***2.b)*** de l'Exercice 1) que l'application $f : E \to F$ est injective.
  - Par hypothèse :
  $$f \circ g = \mathrm{id}_F$$
  Or, l'application id_F est bijective. En particulier, elle est surjective.
  Ainsi, l'application $f \circ g : F \to F$ est surjective. On en conclut (résultat démontré en ***2.b)*** de l'Exercice 2) que l'application $f : E \to F$ est surjective.

  Finalement l'application $f : E \to F$ est bien bijective.

▶ Par hypothèse :

$$\begin{array}{lrl} & f \circ g & = \mathrm{id}_F \\ \text{donc} & f^{-1} \circ \Big(f \circ g\Big) & = f^{-1} \circ \mathrm{id}_F \\ \text{donc} & \Big(f^{-1} \circ f\Big) \circ g & = f^{-1} \qquad \textit{(car la loi } \circ \textit{ est associative)} \\ \text{donc} & g & = f^{-1} \end{array}$$

On en conclut que l'application $g : F \to E$ est bijective (puisque l'application f^{-1} l'est). Enfin, sa bijection réciproque est la fonction :

$$g^{-1} = \Big(f^{-1}\Big)^{-1} = f$$

Commentaire

- Il ne faut pas confondre :
  × $f^{-1}(V)$ qui est l'image réciproque de l'ensemble B par l'application f.
  Par définition, $f^{-1}(V)$ est une **partie** de E (c'est-à-dire un ensemble).
  × $f^{-1}(y)$ qui est l'image de l'élément y par l'application f^{-1}, bijection réciproque de f.
  Par définition, $f^{-1}(y)$ est un **élément** de E.

  Il convient donc de remarquer que la même notation est utilisée pour deux utilisations très différentes. C'est le contexte qui permet de déterminer quel est l'objet concerné :

  $f^{-1}\big(\text{« partie de } F \text{ »}\big)$ est une partie de E $\qquad$ $f^{-1}\big(\text{« élément de } F \text{ »}\big)$ est un élément de E

- Dans cet exercice, on démontre que l'application $f : E \to F$ est bijective. On se sert alors de l'application f^{-1} (on peut l'utiliser car f est bijective) pour démontrer que l'application $g : F \to E$ est bijective. On aurait aussi pu démontrer le caractère bijectif de g en raisonnant comme on l'a fait pour démontrer le caractère bijectif de f.

□