

Colles

semaine 29 : 05 avril - 10 mai - PCSI

I. Questions de cours

Exercice 1

1. Loi de Bernoulli (définition, expérience aléatoire de référence, deux exemples).
2. Propriétés des applications probabilités.

Démonstration.

1. • Loi de Bernoulli

- On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ si :

$$a) \quad X(\Omega) = \{0, 1\}$$

$$b) \quad \mathbb{P}(\{X = 1\}) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\{X = 0\}) = 1 - p = q$$

- On utilisera la notation $X \sim \mathcal{B}(p)$ pour signifier que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p .

• Expérience aléatoire de référence et variable aléatoire associée

- × On considère une expérience aléatoire possédant deux issues (qui ne sont pas forcément équiprobables). L'une de ces issues est nommée « succès » et se produit avec probabilité p ; l'autre est nommée « échec » et se produit avec probabilité $1 - p$.

Alors la variable aléatoire X qui prend pour valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec suit la loi de Bernoulli de paramètre p .

• Exemples usuels

- a) On considère une pièce de monnaie amenant Pile avec probabilité p et Face avec probabilité $1 - p$. L'expérience consiste en 1 lancer de cette pièce de monnaie.

Ainsi : $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}$.

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur 1 si on obtient Pile et à 0 si on obtient Face.

$$\times \quad X(\Omega) = \{0, 1\}.$$

$$\times \quad \mathbb{P}(\{X = 1\}) = p \text{ et } \mathbb{P}(\{X = 0\}) = 1 - p.$$

$$\text{Ainsi : } X \sim \mathcal{B}(p).$$

- b) On considère une urne contenant r boules rouges et v boules vertes.

L'expérience consiste à tirer une boule.

Ainsi : $\Omega = \{b_1, \dots, b_r, b_{r+1}, \dots, b_{r+v}\}$ (on numérote chacune des boules).

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur 1 si on tire une boule rouge et 0 si on tire une boule verte.

$$\text{Alors : } X \sim \mathcal{B}\left(\frac{r}{r+v}\right).$$

2. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

$$a) \quad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A). \text{ En particulier : } \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

$$b) \quad \forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, \mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$c) \quad \forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B) \quad (\text{l'application } \mathbb{P} \text{ est croissante})$$

$$d) \quad \forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

a) Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Remarquons : $A \cup \bar{A} = \Omega$ (réunion disjointe). Ainsi, par additivité :

$$\mathbb{P}(A \cup \bar{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

b) Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$. Remarquons : $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$ (réunion disjointe). Ainsi, par additivité :

$$\mathbb{P}((A \setminus B) \cup (A \cap B)) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$$

c) Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$. Supposons : $A \subset B$.

D'après le point précédent : $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B)$.

Or, comme $A \subset B$, alors $A \cap B = A$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geq \mathbb{P}(A)$$

d) Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$. Remarquons : $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ (la deuxième réunion est disjointe). On en déduit, à l'aide du point b) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \end{aligned}$$

□

Exercice 2

1. Loi uniforme (définition, expérience aléatoire de référence, deux exemples).
2. Énoncé et démonstration de la formule des probabilités totales.

Démonstration.

1. • Loi uniforme

- On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi uniforme** sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) si :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket \\ \text{b)} & \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(\{X = k\}) = \frac{1}{n} \end{array}$$

- Plus généralement, si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et $a < b$, on dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi uniforme** sur $\llbracket a, b \rrbracket$ si :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & X(\Omega) = \llbracket a, b \rrbracket \\ \text{b)} & \forall k \in \llbracket a, b \rrbracket, \quad \mathbb{P}(\{X = k\}) = \frac{1}{b - a + 1} \end{array}$$

- On utilisera la notation $X \sim \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$ pour signifier que X suit la loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$.

• Expérience aléatoire de référence et variable aléatoire associée

- × On considère une expérience qui possède n issues différentes (qu'on numérote de 1 à n) qui sont équiprobables.

Alors la variable aléatoire X qui prend pour valeur i si l'issue i est obtenue lors de l'expérience, suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

• Exemples usuels

- a) On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n .

L'expérience consiste à tirer une boule.

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le numéro de la boule tirée.

Alors : $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

b) On considère une pièce équilibrée.

L'expérience consiste en 1 lancer de cette pièce.

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur 1 si on obtient Pile et 0 si on obtient Face. Alors : $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 0, 1 \rrbracket)$.

2. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Soit $(A_1, \dots, A_m)$ une famille finie d'événements de $\mathcal{P}(\Omega)$.

On suppose que $(A_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket} \in \mathcal{P}(\Omega)^m$ est un système complet d'événements.

Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(B \cap A_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(B | A_i) \times \mathbb{P}(A_i) \end{aligned}$$

(avec la convention $\mathbb{P}(B | A_i) \times \mathbb{P}(A_i) = 0$ si $\mathbb{P}(A_i) = 0$)

× Comme $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements : $\Omega = \bigcup_{i=1}^m A_i$.

Ainsi : $B = B \cap \Omega = B \cap \bigcup_{i=1}^m A_i = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$.

× Démontrons que la famille $(B \cap A_i)_{i \in I}$ est constituée d'événements deux à deux incompatibles. Pour tout $i \in I$, notons : $C_i = B \cap A_i$.

Il s'agit de démontrer que les événements de la suite $(C_i)_{i \in I}$ sont deux à deux incompatibles.

Soit $(i, j) \in I^2$. Supposons $i \neq j$. Alors :

$$C_i \cap C_j = (A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = A \cap (B_i \cap B_j) = A \cap \emptyset = \emptyset$$

× Finalement :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^m (B \cap A_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(B \cap A_i) \quad (\text{par additivité de } \mathbb{P}) \\ &= \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(B | A_i) \times \mathbb{P}(A_i) \end{aligned}$$

□

Exercice 3

1. Loi binomiale (définition, expérience aléatoire de référence, deux exemples).

2. Énoncé de la formule des probabilités composées.

Démonstration.

1. • Loi binomiale

- On dit qu'une variable aléatoire discrète X suit la **loi binomiale** de paramètre (n, p) , où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$ si :

$$a) \quad X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$$

$$b) \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(\{X = k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- On utilisera la notation $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ pour signifier que X suit la loi binomiale de paramètre (n, p) .

• **Expérience aléatoire de référence et variable aléatoire associée**

- × On considère une expérience aléatoire qui consiste en une succession de n épreuves indépendantes, chacune d'entre elles ayant deux issues : succès obtenu avec probabilité p et échec obtenu avec probabilité $q = 1 - p$.
- × Autrement dit, l'expérience consiste à effectuer n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès p .

Alors la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de succès obtenus au cours de cette expérience suit la loi binomiale de paramètre (n, p) .

• **Exemples usuels**

a) On considère une pièce de monnaie amenant Pile avec probabilité p et Face avec probabilité $1 - p$. L'expérience consiste en n lancers consécutifs de cette pièce de monnaie.

Ainsi : $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}^n$.

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de Pile obtenus lors de l'expérience.

b) On considère une urne contenant r boules rouges et v boules vertes.

L'expérience consiste à tirer **successivement** n boules **avec remise**.

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de boules rouges tirées.

Alors : $X \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{r}{r+v}\right)$

Cet exemple permet de retrouver la formule du binôme de Newton.

Comme $(\{X = k\})_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est la s.c.e. associé à X :

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(\{X = k\}) = 1 \quad \text{donc} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{r}{r+v}\right)^k \left(\frac{v}{r+v}\right)^{n-k} = 1.$$

On en conclut :
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^k v^{n-k} = (r+v)^n$$

2. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Soit $(A_1, \dots, A_m)$ une famille finie d'événements de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Alors :
$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_m) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{m-1}}(A_m)$$

En particulier, dans le cas $m = 2$:
$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2)$$

Commentaire

- Ce qu'il faut retenir c'est que la probabilité d'une intersection d'événements s'écrit **TOUJOURS** comme une produit de probabilités. Il faut cependant être plus précis pour bien comprendre ce qu'est ce produit :

- × dans le cas où les événements de la famille $(A_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ sont indépendants :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_m) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3) \times \dots \times \mathbb{P}(A_m)$$

- × dans le cas où les événements de la famille $(A_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ ne sont pas indépendants :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_m) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{m-1}}(A_m)$$

On reconnaît une formule similaire à celle ci-dessus, à ceci près que l'on prend compte, à chaque étape, du contexte (on conditionne ainsi au fur et à mesure par un nouvel événement). $\square$