Colles

semaine 30 : 12 avril - 17 mai - PCSI

I. Questions de cours

Exercice 1

1. Loi de Bernoulli (définition, expérience aléatoire de référence, deux exemples).

2. Propriétés des applications probabilités.

Démonstration.

1. • **Loi de Bernoulli**

> • On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi de Bernoulli** de paramètre $p \in \,]0,1[$ si :
>
> *a)* $\boxed{X(\Omega) = \{0,1\}}$
>
> *b)* $\boxed{\mathbb{P}(\{X=1\}) = p}$ et $\boxed{\mathbb{P}(\{X=0\}) = 1-p} = q$
>
> • On utilisera la notation $X \sim \mathcal{B}(p)$ pour signifier que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

• **Expérience aléatoire de référence et variable aléatoire associée**

× On considère une expérience aléatoire possédant deux issues (qui ne sont pas forcément équiprobables). L'une de ces issues est nommée « succès » et se produit avec probabilité p ; l'autre est nommée « échec » et se produit avec probabilité $1-p$.

Alors la variable aléatoire X qui prend pour valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

• **Exemples usuels**

a) On considère une pièce de monnaie amenant Pile avec probabilité p et Face avec probabilité $1-p$. L'expérience consiste en 1 lancer de cette pièce de monnaie.
Ainsi : $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}$.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur 1 si on obtient Pile et à 0 si on obtient Face.

× $X(\Omega) = \{0,1\}$.

× $\mathbb{P}(\{X=1\}) = p$ et $\mathbb{P}(\{X=0\}) = 1-p$.

Ainsi : $X \sim \mathcal{B}(p)$.

b) On considère une urne contenant r boules rouges et v boules vertes.
L'expérience consiste à tirer une boule.
Ainsi : $\Omega = \{b_1, \dots, b_r, b_{r+1}, \dots, b_{r+v}\}$ *(on numérote chacune des boules).*
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur 1 si on tire une boule rouge et 0 si on tire une boule verte.
Alors : $X \sim \mathcal{B}\left(\dfrac{r}{r+v}\right)$.

2. Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

a) $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}\left(\bar{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$. En particulier : $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

b) $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$, $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$

c) $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$, $A \subset B \ \Rightarrow\ \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ *(l'application $\mathbb{P}$ est croissante)*

d) $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

a) Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$. Remarquons : $A \cup \overline{A} = \Omega$ (réunion disjointe). Ainsi, par additivité :

$$\mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

b) Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$. Remarquons : $(A \setminus B) \ \cup \ (A \cap B) = A$ (réunion disjointe). Ainsi, par additivité :

$$\mathbb{P}((A \setminus B) \ \cup \ (A \cap B)) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$$

c) Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$. Supposons : $A \subset B$.
D'après le point précédent : $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B)$.
Or, comme $A \subset B$, alors $A \cap B = A$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geqslant \mathbb{P}(A)$$

d) Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$. Remarquons : $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ (la deuxième réunion est disjointe).
On en déduit, à l'aide du point ***b)*** :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(A \cup B) & = & \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) \\ & = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \\ & = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \end{array}$$ □

Exercice 2

1. Loi uniforme (définition, expérience aléatoire de référence, deux exemples).

2. Énoncé et démonstration de la formule des probabilités totales.

Démonstration.

1. • **Loi uniforme**

- On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi uniforme** sur $[\![1, n]\!]$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = [\![1, n]\!]}$ ***b)*** $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\boxed{\mathbb{P}(\{X = k\}) = \dfrac{1}{n}}$

- Plus généralement, si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et $a < b$, on dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi uniforme** sur $[\![a, b]\!]$ si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = [\![a, b]\!]}$ ***b)*** $\forall k \in [\![a, b]\!]$, $\boxed{\mathbb{P}(\{X = k\}) = \dfrac{1}{b - a + 1}}$

- On utilisera la notation $X \sim \mathcal{U}([\![a, b]\!])$ pour signifier que X suit la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$.

• **Expérience aléatoire de référence et variable aléatoire associée**

× On considère une expérience qui possède n issues différentes (qu'on numérote de 1 à n) qui sont équiprobables.

Alors la variable aléatoire X qui prend pour valeur i si l'issue i est obtenue lors de l'expérience, suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

• **Exemples usuels**

a) On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
L'expérience consiste à tirer une boule.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le numéro de la boule tirée.
Alors : $X \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.

b) On considère une pièce équilibrée.
L'expérience consiste en 1 lancer de cette pièce.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur 1 si on obtient Pile et 0 si on obtient Face. Alors : $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 0,1 \rrbracket)$.

2. Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
Soit $(A_1, \ldots, A_m)$ une famille d'événements de $\mathscr{P}(\Omega)$.
On suppose que $(A_i)_{i\in\llbracket 1,m \rrbracket} \in \mathscr{P}(\Omega)^m$ est un système complet d'événements.
Soit $B \in \mathscr{P}(\Omega)$.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(B) & = & \sum\limits_{i=1}^{m} \mathbb{P}\big(B \cap A_i\big) \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{m} \mathbb{P}\big(B \,|\, A_i\big) \times \mathbb{P}(A_i) \end{array}}$$

(avec la convention $\mathbb{P}\big(B \,|\, A_i\big) \times \mathbb{P}(A_i) = 0$ si $\mathbb{P}(A_i) = 0$)

× Comme $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements : $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$.
Ainsi : $B = B \cap \Omega = B \cap \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i = \bigcup\limits_{i\in I} (B \cap A_i)$.

× Démontrons que la famille $(B \cap A_i)_{i\in I}$ est constituée d'événements deux à deux incompatibles. Pour tout $i \in I$, notons : $C_i = B \cap A_i$.
Il s'agit de démontrer que les événements de la suite $(C_i)_{i\in I}$ sont deux à deux incompatibles.
Soit $(i,j) \in I^2$. Supposons $i \neq j$. Alors :

$$C_i \cap C_j \ = \ (A \cap B_i) \ \cap \ (A \cap B_j) \ = \ A \cap (B_i \cap B_j) \ = \ A \cap \varnothing \ = \ \varnothing$$

× Finalement :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(B) & = & \mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{m} (B \cap A_i) \Big) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{m} \mathbb{P}(B \cap A_i) & \textit{(par additivité de } \mathbb{P}\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{m} \mathbb{P}(B \,|\, A_i) \times \mathbb{P}(A_i) & \end{array}$$

□

Exercice 3

1. Loi binomiale (définition, expérience aléatoire de référence, deux exemples).

2. Énoncé de la formule des probabilités composées.

Démonstration.

1. • **Loi binomiale**

- On dit qu'une variable aléatoire discrète X suit **la loi binomiale** de paramètre (n,p), où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \,]0,1[$ si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = \llbracket 0,n \rrbracket}$

  b) $\forall k \in \llbracket 0,n \rrbracket$, $\boxed{\mathbb{P}(\{X = k\}) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$

- On utilisera la notation $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ pour signifier que X suit la loi binomiale de paramètre (n,p).

- **Expérience aléatoire de référence et variable aléatoire associée**
  - × On considère une expérience aléatoire qui consiste en une succession de n épreuves indépendantes, chacune d'entre elles ayant deux issues : succès obtenu avec probabilité p et échec obtenu avec probabilité $q = 1 - p$.
  - × Autrement dit, l'expérience consiste à effectuer n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès p.

  Alors la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de succès obtenus au cours de cette expérience suit la loi binomiale de paramètre (n, p).

- **Exemples usuels**

  a) On considère une pièce de monnaie amenant Pile avec probabilité p et Face avec probabilité $1 - p$. L'expérience consiste en n lancers consécutifs de cette pièce de monnaie.
  Ainsi : $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}^n$.
  On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de Pile obtenus lors de l'expérience.

  b) On considère une urne contenant r boules rouges et v boules vertes.
  L'expérience consiste à tirer **successivement** n boules **avec remise**.
  On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de boules rouges tirées.
  Alors : $X \sim \mathcal{B}\left(n, \dfrac{r}{r+v}\right)$

  Cet exemple permet de retrouver la formule du binôme de Newton.
  Comme $(\{X = k\})_{k \in [\![0,n]\!]}$ est le sce associé à X :
  $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\}) = 1$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{r}{r+v}\right)^k \left(\frac{v}{r+v}\right)^{n-k} = 1$.

  On en conclut : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, r^k\, v^{n-k} = (r+v)^n}$

2. Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
Soit $(A_1, \dots, A_m)$ une famille d'événements de $\mathscr{P}(\Omega)$.

Alors : $\boxed{\mathbb{P}\big(A_1 \cap \ldots \cap A_m\big) \; = \; \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \ldots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \ldots \cap A_{m-1}}(A_m)}$

En particulier, dans le cas $m = 2$: $\boxed{\mathbb{P}\big(A_1 \cap A_2\big) \; = \; \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2)}$

Commentaire

- Ce qu'il faut retenir c'est que la probabilité d'une intersection d'événements s'écrit `TOUJOURS` comme une produit de probabilités. Il faut cependant être plus précis pour bien comprendre ce qu'est ce produit :
  - × dans le cas où les événements de la famille $(A_i)_{i \in [\![1,m]\!]}$ sont indépendants :

  $$\mathbb{P}\big(A_1 \cap \ldots \cap A_m\big) \; = \; \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3) \times \ldots \times \mathbb{P}(A_m)$$

  - × dans le cas où les événements de la famille $(A_i)_{i \in [\![1,m]\!]}$ ne sont pas indépendants :

  $$\mathbb{P}\big(A_1 \cap \ldots \cap A_m\big) \; = \; \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \ldots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \ldots \cap A_{m-1}}(A_m)$$

  On reconnaît une formule similaire à celle ci-dessus, à ceci près que l'on prend en compte, à chaque étape, du contexte (on conditionne ainsi au fur et à mesure par un nouvel événement). □