Colles

semaine 30 : 19 mai - 24 mai - PCSI

I. Questions de cours

Exercice 1

1. Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Démontrer : L'application f injective $\Leftrightarrow$ $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

2. Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$.
Démontrer que $g \circ f$ est linéaire. On précisera les ensembles de départ et d'arrivée.

Démonstration.

1. $(\Rightarrow)$ Supposons f injective. Démontrons : $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

$(\supset)$ Comme f linéaire, $f(0_E) = 0_F$. Ce qui démontre : $\text{Ker}(f) \supset \{0_E\}$.

$(\subset)$ Soit $x \in \text{Ker}(f)$. Ainsi : $f(x) = 0_F = f(0_E)$.
L'application f étant injective, $x = 0_E$. Ce qui démontre : $x \in \{0_E\}$.

$(\Leftarrow)$ Supposons que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$. Démontrons que f est injective.
Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$.
On a alors : $f(x) - f(y) = 0_F$, ce qui s'écrit : $f(x - y) = 0_F$.
Ainsi, $x - y \in \text{Ker}(f) = \{0_E\}$, d'où $x - y = 0_E$ et $x = y$.

2. Démontrons : $g \circ f \in \mathscr{L}(E, G)$.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Soit $(x_1, x_2) \in E \times E$.

$$\begin{array}{rcll} g \circ f\big(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2\big) & = & g\Big(f\big(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2\big) \Big) & \\ & = & g\Big(\lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) \Big) & \textit{(car } f \in \mathscr{L}(E,F)\textit{)} \\ & = & \lambda_1 \cdot g\big(f(x_1) \big) + \lambda_2 \cdot g\big(f(x_2) \big) & \textit{(car } g \in \mathscr{L}(F,G)\textit{)} \\ & = & \lambda_1 \cdot g \circ f(x_1) + \lambda_2 \cdot g \circ f(x_2) & \end{array}$$

□

Exercice 2

1. Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On suppose que E est de dimension finie p et on note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

a) Que signifie que l'application f est entièrement déterminée par sa valeur sur $\mathscr{B}$?

b) En particulier, comment peut-on écrire $\text{Im}(f)$?

2. Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Démontrer que $\text{Ker}(f)$ est un espace vectoriel.

Démonstration.

1. a) Si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E alors la valeur de $f(e_1)$, …, $f(e_p)$, permet de déterminer la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in E$.

b) Démontrons : $\boxed{\text{Im}(f) = \text{Vect}\left(f(e_1), \ldots, f(e_p)\right)}$.

($\subset$) Soit $y \in \text{Im}(f)$.
Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Le vecteur x se décompose de manière unique sur $\mathscr{B}$. Autrement dit, il existe un unique p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ tel que : $x = x_1 \cdot e_1 + \cdots + x_p \cdot e_p$.
Ainsi, par linéarité de f :

$$y = f(x) = x_1 \cdot f(e_1) + \cdots + x_p \cdot f(e_p)$$

Ainsi, $y \in \text{Vect}\left(f(e_1), \ldots, f(e_p)\right)$.

($\supset$) Soit $y \in \text{Vect}\left(f(e_1), \ldots, f(e_p)\right)$. Il existe alors $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$y = \lambda_1 \cdot f(e_1) + \ldots + \lambda_p \cdot f(e_p) = f\Big(\lambda_1 \cdot e_1 + \ldots + \lambda_p \cdot e_p\Big)$$

Ainsi, $y \in \text{Im}(f)$.

2. Démontrons que $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

(i) $\text{Ker}(f) \subseteq E$ par définition.

(ii) $\text{Ker}(f) \neq \varnothing$ car $0_E \in \text{Ker}(f)$. En effet : $f(0_E) = 0_F$.

(iii) Stabilité de $\text{Ker}(f)$ par combinaisons linéaires
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(x_1, x_2) \in (\text{Ker}(f))^2$.

$$\begin{array}{rclcll} f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) & = & \lambda_1 \cdot f(x_1) & + & \lambda_2 \cdot f(x_2) & \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \\ & = & \lambda_1 \cdot 0_F & + & \lambda_2 \cdot 0_F & \textit{(car } x_1 \in \text{Ker}(f) \textit{ et } x_2 \in \text{Ker}(f)\textit{)} \\ & = & 0_F & & & \end{array}$$

□

Exercice 3

1. Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Démontrer que $\text{Im}(f)$ est un espace vectoriel.

2. Définition et caractérisation des projecteurs et symétries.

Démonstration.

1. Démontrons que $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

(i) $\text{Im}(f) \subseteq F$ par définition.

(ii) $\text{Im}(f) \neq \varnothing$ car $0_F \in \text{Im}(f)$. En effet : $0_F = f(0_E)$.

(iii) Stabilité de $\text{Im}(f)$ par combinaisons linéaires
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(y_1, y_2) \in (\text{Im}(f))^2$.
Ainsi, il existe $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que : $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.

$$\begin{array}{rcll} \lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 & = & \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) & \\ & = & f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) & \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \end{array}$$

Ainsi, $\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 \in \text{Im}(f)$.

2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E ($E = F \oplus G$).
Ainsi, tout élément $x \in E$ se décompose de manière unique comme somme d'un élément de E et d'un élément de F.
On note alors $(x_F, x_G) \in F \times G$ l'unique couple de vecteurs tel que $x = x_F + x_G$.

(1) On appelle alors projection sur F parallèlement à G, l'endomorphisme p :

$$p : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F \end{array}$$

(2) On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G, l'endomorphisme s :

$$s : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F - x_G \end{array}$$

Propriété caractéristique

$$\boxed{\begin{array}{rcl} p \text{ est un projecteur de } E & \Leftrightarrow & p \circ p = p \\ & \Leftrightarrow & E = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(p) \end{array}}$$

Dans ce cas, p est le projecteur sur $\operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(p)$.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} s \text{ est une symétrie de } E & \Leftrightarrow & s \circ s = \mathrm{id}_E \\ & \Leftrightarrow & E = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E) \end{array}}$$

Dans ce cas, s est la symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$. □