Colles

semaine 10 : 11 novembre - 16 novembre

Théorème de convergence dominée

Exercice 1

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n\,\mathrm{e}^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n\,\mathrm{e}^{-t}}\,dt$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt$.

1. Justifier que I_n est bien définie.

2. *a)* Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n\, I_n$ est-elle convergente ?

Théorème d'intégration terme à terme

Exercice 3

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto t^n\,\ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\,\ln(t)\,dt$

2. Démontrer que $f : t \mapsto \mathrm{e}^t\,\ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et : $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t\,\ln(t)\,dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,n!}$.

Exercice 4

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |\,a_n\,|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : t \mapsto \dfrac{a_n\,t^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-t}$.

1. *a)* Jusitfier que la suite (a_n) est bornée.

b) Jusitifer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

On admet, dans la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

2. *a)* Jusitfier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n\,\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\,dt$.

En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\,f_n(t)\,|\,dt$.

b) Démontrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n\,t^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-t}\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 5
On souhaite justifier l'existence et déterrminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(\sqrt{x})}\, dx$.

1. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}(\sqrt{x})}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

2. Démontrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(\sqrt{x})}\, dx \;=\; \int_1^0 \frac{2}{t-\frac{1}{t}}\, \frac{2\,\ln(t)}{t}\, dt$.

3. ***a)*** Calculer $\displaystyle\int_0^1 \left| -t^{2n}\, \ln(t) \right| dt$.

b) Démontrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx \;=\; \frac{\pi^2}{2}$.

(on pourra utiliser : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \;=\; \frac{\pi^2}{6}$*)*

Exercice 6

1. Démontrer : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t}\, dt \;=\; -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\, dt$.

2. En déduire : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t}\, dt \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

Exercice 7
Pour $x > 1$, on note : $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Montrer :

$$\int_2^{+\infty} \big(\zeta(x) - 1\big)\, dx \;=\; \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2\, \ln(n)}$$

Intégrales à paramètres

Exercice 8
On note, pour tout $x \in \,]0,+\infty[$, pour tout $t \in [0,+\infty[$, $f(x,t) \;=\; \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}$.

1. Démontrer : $\forall x \in \,]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On pose alors : $\forall x \in \,]0,+\infty[$, $\Gamma(x) \;=\; \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, dt$.

2. Pour tout $x \in \,]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.

3. Démontrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Exercice 9

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

2. Démontrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, \cos(xt)\, dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. ***a)*** Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.

b) Résoudre (E).

Exercice 10

On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\, dt$

1. Démontrer que F est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

2. Démontrer que $x \mapsto x\ F(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.

3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.