Colles

semaine 11 : 18 novembre - 23 novembre

I. Questions de cours

Exercice 1

On considère une suite infinie de lancers d'un dé à 6 faces.
Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note F_i : « obtenir un 6 au $i^{\text{ème}}$ lancer ».

a) Quelle est la probabilité de n'obtenir que des 6 au cours de l'expérience aléatoire ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir (au moins) un 6 au cours de l'expérience aléatoire ?

Exercice 2

On considère 2 pièces de monnaie :

× la pièce de monnaie A amène Pile avec probabilité $p_1 \in]0,1[$.

× la pièce de monnaie B amène Pile avec probabilité $p_2 \in]0,1[$.

On se dote aussi d'un dé équilibré à 6 faces.

L'expérience se déroule en 2 temps :

(i) on lance une fois le dé.

(ii) on poursuit alors comme suit :

× si on a obtenu 1 ou 2, on lance la pièce A.

× dans tout autre cas, on lance la pièce B.

1) Exhiber un système complet d'événements lié à cette expérience.

2) À l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer la probabilité d'obtenir Pile à l'issue de cette expérience.

Exercice 3

Un sauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées $1, 2, \dots, n, \dots$.

Il ne peut tenter de passer la hauteur $n+1$ que s'il a réussi les sauts de hauteurs 1, 2, …, n.

En supposant que le sauteur a réussi tous les sauts précédents, la probabilité de succès au $n^{\text{ème}}$ saut est $p_n = \dfrac{1}{n}$. Ainsi le premier saut est toujours réussi.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'événement : « le sauteur a réussi son $k^{\text{ème}}$ saut » et on note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Rappeler sans démonstration la formule des probabilités composées.

2. Pour tout entier $n \geqslant 2$, exprimer l'événement $\{X = n\}$ en fonction d'événements du type S_k.

3. Déterminer la loi de X.

II. Autres exercices

Exercice 4

On considère n personnes.

Dans la suite, pour simplifier, toutes les années sont non-bissextiles. Autrement dit, on considère qu'il y a 365 jours dans une année.

1. *a)* Quelle est la probabilité notée $q(n)$ qu'aucune de ces n personnes ne soient nées le même jour (sans prise en compte de l'année de naissance) ?

b) En déduire la probabilité notée $p(n)$ d'avoir, parmi ces n personnes, au moins deux personnes nées le même jour.

2. En utilisant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$, montrer :

$$p(n) \geqslant 1 - \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2 \times 365}\right)$$

3. À partir de combien de personnes peut-on espérer (c'est-à-dire avec une probabilité supérieur à $\frac{1}{2}$) qu'au moins 2 personnes aient leurs anniversaires le même jour ?

Exercice 5

On considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par P_n l'événement « Pile apparaît au $n^{\text{ème}}$ lancer » et par F_n l'événement « Face apparaît au $n^{\text{ème}}$ lancer ».

Soit Y la v.a.r. désignant le rang du lancer où, pour la première fois, apparaît un Face précédé d'au moins deux Pile si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si cette configuration n'apparaît jamais.

On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

On pose $c_1 = c_2 = 0$ et pour tout $n \geqslant 3$, $c_n = \mathbb{P}(\{Y = n\})$. On note également :

$$\forall n \geqslant 3,\ B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n \quad \text{et} \quad U_n = \bigcup_{i=3}^{n} B_i$$

On pose enfin $u_1 = u_2 = 0$ et pour tout $n \geqslant 3$, $u_n = \mathbb{P}(U_n)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 3}$ est monotone et convergente.

2. *a)* Pour tout $n \geqslant 3$, calculer $\mathbb{P}(B_n)$.

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, les événements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.

c) Calculer les valeurs de u_3, u_4 et u_5.

3. Dans cette question, on suppose $n \geqslant 5$.

a) Comparer les événements $U_n \cap B_{n+1}$ et $U_{n-2} \cap B_{n+1}$. Préciser leurs probabilités respectives.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

d) Calculer $\mathbb{P}(\{Y = 0\})$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = 1 - u_n$.

a) Trouver $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \beta v_{n+2} + \gamma v_{n+3}$.

b) Montrer que la série de terme général v_n est convergente et calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Exercice 6

Deux joueurs A et B jouent aux échecs sans discontinuer.

- Le joueur B gagne la première partie.
- La probabilité que A remporte sa partie sachant qu'il vient de remporter la précédente est de $0,6$.
- La probabilité que B remporte sa partie sachant qu'il vient de remporter la précédente est de $0,5$.

On note p_n la probabilité que B remporte la $n^{\text{ème}}$ partie.

Montrer que (p_n) est arithmético-géométrique et donner sa formule explicite.

Exercice 7

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

On note $B = \bigcap\limits_{n\geqslant 1} \bigcup\limits_{k\geqslant n} A_k$. On rappelle que cet événement est en fait :

$$B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ appartient à une infinité de } A_n\}$$

Enfin, on note $p_n = \mathbb{P}(A_n)$ et on suppose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n \neq 1$. Dans la suite, on suppose :

× les événements de la suite (A_n) sont mutuellement indépendants,

× la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

a. Montrer que : $\overline{B} = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} \bigcap\limits_{k\geqslant n} \overline{A_k}$.

b. Exprimer $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{m} \overline{A_k}\right)$ en fonction des p_k.

c. Montrer que la série $\sum \ln(1-p_k)$ diverge.
(on pourra distinguer le cas où $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et le cas $p_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$)

Quelle est la limite de $\sum\limits_{k=0}^{n} \ln(1-p_k)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

d. Simplifier $\ln\left(\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{m} \overline{A_k}\right)\right)$ et en déduire que $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k\geqslant n} \overline{A_k}\right) = 0$.

e. Démontrer que la suite $\left(\bigcap\limits_{k\geqslant n} \overline{A_k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

f. En déduire une écriture simplifiée de $\bigcup\limits_{n=1}^{m} \bigcap\limits_{k\geqslant n} \overline{A_k}$.

g. Démontrer enfin que B est un événement presque sûr.

Exercice 8

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

2) On dispose d'une urne vide au départ.

× Le premier jour, une personne met une boule numérotée 1 dans l'urne, la tire, note son numéro et la remet dans l'urne (!).

× Ensuite, à chaque nouvelle journée, elle ajoute une boule qui porte le numéro du jour considéré, elle tire alors une boule au hasard, note le numéro de cette boule et la remet dans l'urne. Le processus se poursuit indéfiniment ...

a. Soient $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $(E_i)_{i\in[\![1,\ell]\!]}$ une famille de ℓ événements indépendants.

Montrer que l'on a : $\mathbb{P}(\bigcap\limits_{1\leqslant i\leqslant \ell} \overline{E_i}) \leqslant \mathrm{e}^{-\sum\limits_{i=1}^{\ell} \mathbb{P}(E_i)}$

b. On note A_k : « la boule numérotée 10 sort lors du $k^{\text{ème}}$ tirage ».
Déterminer $\mathbb{P}(A_k)$.

c. À l'aide des événements A_k, exprimer l'événement : « la boule 10 sort au moins une fois à partir du $n^{\text{ème}}$ tirage » (où $n \in \mathbb{N}$).
Déterminer la probabilité de cet événement en considérant son contraire.

d. À l'aide des événements A_k, exprimer l'événement : « la boule 10 sort une infinité de fois ».
Déterminer la probabilité de cet événement.

e. À l'aide des événements A_k, exprimer l'événement : « la boule 10 sort une infinité de fois **de suite** ». Déterminer la probabilité de cet événement.

Exercice 9

Une urne contient initialement v boules vertes et r boules rouges.
On effectue une série de tirages de la façon suivante. On choisit une boule au hasard dans l'urne.

- Si cette boule est verte, on la remet dans l'urne.
- Si elle est rouge, on la remplace par une boule verte.

On procède ainsi pour tous les tirages suivants.

1. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on note R_j l'événement : « on obtient une boule rouge au $j^{\text{ème}}$ tirage », et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n l'événement « on obtient pour la première fois une boule verte au $n^{\text{ème}}$ tirage ». Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) Exprimer l'événement A_n en fonction d'événements des familles $(R_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\overline{R_k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

   b) Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.

2. Pour tout $s \in \mathbb{N}$, on note B_s l'événement : « il reste s boules rouges dans l'urne lorsque l'on obtient la première boule verte ».

   a) Calculer $\mathbb{P}(B_0)$.

   b) On pose $N = v + r$ (c'est le nombre de boules initialement contenue dans l'urne).
   Montrer : $\forall s \in [\![0, r]\!],\ \mathbb{P}(B_s) = \dfrac{r!}{N^r} \left(\dfrac{N^s}{s!} - \dfrac{N^{s-1}}{(s-1)!}\right)$.

   c) Vérifier par le calcul : $\sum\limits_{s=0}^{r} \mathbb{P}(B_s) = 1$.

III. Oral ESCP - 2019

Exercice 10

Les v.a.r. introduites sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Dans une urne sont placées deux boules, une noire N et une rouge R. On effectue une suite de tirages d'une boule au hasard selon les modalités suivantes :

× si la boule tirée est noire : on ne la remet pas dans l'urne (et la boule rouge sera nécessairement tirée au prochain tirage),

× si la boule tirée est rouge : on remet l'urne dans l'état initial, avec 2 boules, la noire et la rouge.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note : N_n (respectivement R_n) l'événement : « la $n^{\text{ème}}$ boule tirée est noire (respectivement rouge) ».

1. Pour $n \geqslant 1$, on pose $a_n = \mathbb{P}(N_n)$ et $b_n = \mathbb{P}(R_n)$.

   a) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

   b) En déduire : $b_{n+2} = \dfrac{1}{2}\ b_{n+1} + \dfrac{1}{2}\ b_n$ ainsi que les expressions de a_n et b_n en fonction de n.

2. On note X la variable aléatoire égale au rang de la première boule noire tirée. Quelle est la loi de X ? Calculer son espérance et sa variance.

3. Soit n un entier donné supérieur ou égal à 1. On note Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées lors des n tirages consécutifs.

   a) Déterminer l'intervalle $[\![m_n, M_n]\!]$ des valeurs prises par Z.
   Calculer ensuite $\mathbb{P}\big(\{Z = m_n\}\big)$ et $\mathbb{P}\big(\{Z = M_n\}\big)$.

   b) On note $b_{n,k}$ le nombre de tirages de n boules dont exactement k sont noires et se terminent par le tirage d'une boule rouge (l'événement R_n est réalisé).
   Exprimer successivement la probabilité $\mathbb{P}\big(R_n \cap \{Z = k\}\big)$ puis la probabilité $\mathbb{P}(R_n)$ en fonction des $b_{n,k}$.

Exercice 11

Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. Soit $R \in \mathbb{N}^*$. On dispose de R pièces de monnaie numérotées de 1 à R qui donnent chacune « pile » avec la probabilité p. On effectue une suite de manches avec ces pièces de la manière suivante :

- × lors de la première manche, on lance chaque pièce une fois ;
- × aux manches suivantes, on ne relance que les pièces qui n'ont pas donné « pile » aux manches précédentes ;
- × on s'arrête lorsque toutes les pièces ont donné « pile ».

Pour tout $k \in [\![1, R]\!]$, on note X_k le nombre total de lancers effectués avec la $k^{\text{ème}}$ pièce.

On note Y le nombre de manches effectuées.

1. Déterminer la loi de X_k, son espérance et sa variance.

2. Déterminer la loi de Y.

3. Montrer la convergence de la série $\sum \mathbb{P}\big(\{Y > n\}\big)$.

On admet alors que Y admet une espérance et que $\mathbb{E}(Y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{Y > n\}\big)$.

4. Soit la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 - (1-q^x)^R$.

Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ dx$ et montrer :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\ dx \ = \ -\frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}$$

5. Établir l'encadrement : $\displaystyle -\frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1} \ \leqslant \ \mathbb{E}(Y) \ \leqslant \ 1 - \frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R} \frac{1}{k+1}$.

En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(Y)$ lorsque R tend vers $+\infty$.

(on pourra admettre sans démonstration que $\displaystyle\sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}$ *est équivalent à* $\ln(R)$ *lorsque* R *tend vers* $+\infty$*).*

IV. Oral ESCP - 2018

Exercice 12

Une urne contient exclusivement des boules rouges et noires indiscernables au toucher.

La proportion de boules rouges est $p \in]0,1[$ et celle de boules noires est $q = 1-p$.

On effectue des tirages successifs avec remise d'une boule de l'urne jusqu'à obtention d'une boule rouge.

Un maximum de n tirages, avec $n \geqslant 1$, est cependant fixé : on décide de s'arrêter si on n'a pas tiré de boule rouge à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage.

On note G_n la variable aléatoire égale au rang du tirage d'une boule rouge, si ce rang existe, et qui vaut 0 si aucune boule rouge n'est apparue au cours des n tirages.

1. Dans cette question, n est un entier fixé.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire G_n.

b) En utilisant la fonction $x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} x^k$, montrer que l'on a : $\mathbb{E}(G_n) = \dfrac{1 - q^n\,(1+np)}{p}$.

2. ***a)*** Déterminer la limite de $\mathbb{E}(G_n)$ quand n tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat.

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(\{G_n = k\}\big) \;=\; \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big)$$

où X est une v.a.r. discrète suivant une loi usuelle à déterminer.

Ce processus peut être considéré comme une partie qui est gagnée si une boule rouge est apparue au cours des n tirages.

On mise de la manière suivante : pour jouer une partie, il faut payer 15 euros.
Si la partie est gagnée à la $k^{\text{ème}}$ boule tirée ($k \leqslant n$), le joueur gagne $(20 - k)$ euros.
On note B_n le gain aléatoire pour une partie.

3. ***a)*** Exprimer B_n en fonction de G_n, puis déterminer son espérance.

b) On admet que pour tout réel $x \in]0,1[$ on a :

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln(1-x)} < 1$$

Quelle valeur de n doit-on choisir afin de maximiser le gain d'une partie ?

Exercice 13

Une pièce truquée donne Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$.

On propose l'expérience suivante pour « rééquilibrer » la pièce.

- L'expérience est constituée d'une suite de parties consécutives.
- Chaque partie consiste à lancer la pièce *deux fois de suite*.
  - × Si à l'issue d'une partie on obtient deux fois le même résultat (2 Pile ou 2 Face), on refait une partie ;
  - × Si à l'issue d'une partie on obtient deux résultats différents, alors on arrête l'expérience et on rend le résultat du dernier lancer.
- L'expérience est modélisée à l'aide d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Soit T la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour que l'expérience se termine.

1. Donner l'ensemble des valeurs prises par T. En déduire $\mathbb{P}\big(\{T = 2k+1\}\big)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

2. ***a)*** Calculer $\mathbb{P}\big(\{T = 2k\}\big)$, pour $k \in \mathbb{N}$ (on pourra s'intéresser à l'événement $A = \{X_1 = X_2\}$, où X_1 et X_2 sont les v.a.r. donnant respectivement le résultat du 1^{er} et du $2^{\text{ème}}$ lancer.

b) En déduire que l'expérience se termine presque sûrement.

c) Calculer l'espérance de T.

3. Soit R la variable aléatoire donnant le résultat de l'expérience. Donner la loi de R.

Exercice 14

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et sont à valeurs dans un sous-ensemble fini $[\![0, n]\!]$ de $\mathbb{N}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Pour tout réel t, on pose :

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big)\, t^k$$

On note $X \sim Y$ lorsque deux variables aléatoires X et Y suivent la même loi.

1. Montrer que $G_X = G_Y$ si et seulement si $X \sim Y$.

2. Montrer que si G_Y est une fonction constante, alors Y est une variable nulle presque sûrement.

On dit que la variable aléatoire X est **décomposable** s'il existe deux variables aléatoires Y et Z indépendantes, non presque sûrement constantes et telles que $X \sim Y + Z$.

3. On suppose que $X \sim Y + Z$ et que Y et Z sont indépendantes. Montrer que $G_X = G_Y \times G_Z$.

4. On suppose que X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, où $p \in]0, 1[$.
Montrer que X n'est pas décomposable.

5. On suppose que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.
Montrer que X est décomposable si et seulement si $n \geqslant 2$.

V. Oral ESCP - 2017

Exercice 15

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$. On dispose d'un paquet de n cartes C_1, C_2, ..., C_n que l'on distribue intégralement, les unes après les autres entre n joueurs J_1, J_2, ..., J_n selon le protocole suivant :

× la première carte C_1 est donnée à J_1 ;

× la deuxième carte C_2 est donnée de façon équiprobable entre J_1 et J_2 ;

× la troisième carte C_3 est donnée de façon équiprobable entre J_1, J_2 et J_3 ;

× et ainsi de suite, jusqu'à la dernière carte C_n qui est donc distribuée de façon équiprobable entre les joueurs J_1, ..., J_n.

On suppose l'expérience modélisée sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de joueurs qui n'ont reçu aucune carte à la fin de la distribution.

1. Déterminer $X_n(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}(\{X_n = 0\})$ et $\mathbb{P}(\{X_n = n - 1\})$.

2. Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on note B_i la v.a.r. qui vaut 1 si J_i n'a reçu aucune carte à la fin de la distribution et vaut 0 sinon.
Déterminer la loi de B_i. Exprimer la v.a.r. X_n en fonction des v.a.r. B_i.
En déduire l'espérance de X_n.

3. En faisant le moins de calculs possibles, donner la loi de X_4.

4. ***a)*** Montrer que pour i et j dans $[\![1, n]\!]$ tels que $i < j$, on a :

$$\mathbb{P}(\{B_i = 1\} \cap \{B_j = 1\}) = \frac{(i-1)(j-2)}{n(n-1)}$$

En déduire la covariance des v.a.r. B_j et B_j.

b) Montrer que : $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{n+1}{12}$.

Exercice 16

Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. On dispose d'une infinité de jetons non discernables et de n urnes. On y place aléatoirement des jetons, un par un, indépendamment les uns des autres.

Pour $j \geqslant 1$, on note X_j le nombre aléatoire d'urnes non vides après avoir placé les j premiers jetons.

1. ***a)*** Quelles valeurs peut prendre la variable aléatoire X_j ? Déterminer les lois de X_1 et X_2.

b) Pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \geqslant 1$, déterminer les probabilités conditionnelles : $\mathbb{P}_{\{X_j=i\}}\big(\{X_{j+1} = k\}\big)$.

c) En déduire la loi de X_{j+1} en fonction de la loi de X_j.

2. On considère la suite $(Q_j)_{j\geqslant 1}$ de fonctions polynômes définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall j \in \mathbb{N}^*, \qquad Q_1(x) \ = \ x^{n-1} \qquad \text{et} \qquad Q_{j+1}(x) \ = \ Q_j(x) + \frac{1-x}{n}\, Q_j'(x)$$

a) Montrer que pour tout $j \geqslant 1$:

$$Q_j(x) \ = \ \sum_{i=0}^{n-1} (x-1)^i \left(1 - \frac{i}{n}\right)^{j-1} \binom{n-1}{i}$$

b) Pour tout entier $j \geqslant 1$, soit la fonction G_j définie par :

$$\begin{array}{rccl} G_j & : & \mathbb{R} & \to \ \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto \ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{X_j = k\}\big)\, x^{n-k} \end{array}$$

Pour un réel x fixé, vérifier que les suites $\big(G_j(x)\big)_{j\geqslant 1}$ et $\big(Q_j(x)\big)_{j\geqslant 1}$ sont égales et en déduire l'expression des $\mathbb{P}\big(\{X_j = n\}\big)$.

c) En déduire que pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \left(1 - \frac{i}{n}\right)^{j-1} \binom{n-1}{i} = 0.$

Exercice 17

Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. Une urne contient initialement n boules numérotées de 1 à n. On vide l'urne en extrayant toutes les boules une par une au hasard et sans remise. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule obtenue au $i^{\text{ème}}$ tirage porte le numéro i et qui vaut 0 dans le cas contraire.

1. ***a)*** Quelle est la loi de X_i ?

b) En déduire l'espérance de la variable aléatoire N qui donne le nombre de fois où, lors du tirage, le rang du tirage et le numéro de la boule obtenue sont égaux.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on dira que le résultat du $k^{\text{ème}}$ tirage est un « sommet » lorsque la boule obtenue à ce tirage porte un numéro strictement supérieur à tous les numéros obtenus jusqu'alors (en particulier, lorsque $k = 1$, la première boule est toujours un sommet).

2. Combien existe-t-il de façons de vider l'urne pour lesquelles il n'y a qu'un seul sommet ?
Combien existe-t-il de façons de vider l'urne pour lesquelles il y a n sommets ?

3. Montrer la relation suivante : pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \binom{p+k}{p} = \binom{p+q+1}{p+1}$.

4. ***a)*** Soient $k \in [\![2, n]\!]$ et $j \in [\![k, n]\!]$ fixés.
Combien existe-t-il de façons de vider l'urne, pour lesquelles, à la fois la $k^{\text{ème}}$ boule obtenue porte le numéro j et le $k^{\text{ème}}$ tirage constitue un sommet ?

b) Combien existe-t-il de façons de vider l'urne pour lesquelles le $k^{\text{ème}}$ tirage est un sommet ? En déduire la probabilité que le $k^{\text{ème}}$ tirage soit un sommet.

5. Soit R la v.a.r. donnant le nombre aléatoire de sommets obtenus lorsque l'on vide l'urne.
Déterminer, sous forme d'une somme, l'espérance de R.

VI. Oral - ESCP 2016

Exercice 18

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Soient λ et p deux réels tels que $\lambda > 0$ et $0 < p < 1$.

On considère le couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, de loi définie par :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}\big(\{X = n\} \cap \{Y = k\}\big) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\,\lambda^n\, p^k\,(1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^2$.
(à démontrer : les probabilités définies au-dessus sont positives et leur somme sur $\mathbb{N}^2$ vaut 1)

2. Déterminer la loi de la v.a.r. X (on pourra penser à utiliser le système complet d'événements $\big(\{Y = k\}\big)_{k \in \mathbb{N}}$), puis celle de la v.a.r. Y. Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?

3. Pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, déterminer $\mathbb{P}_{\{X=n\}}\big(\{Y = k\}\big)$.

4. Soit Z la v.a.r. définie par $Z = X - Y$.
Déterminer la loi de la variable aléatoire Z.

5. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 19

On considère un jeu de roulette avec n issues possibles (les numéros allant de 1 à n). Une partie est constituée d'exactement n lancers successifs de la boule. Pour une partie donnée, on note :

× A_n l'événement : « chaque numéro sort exactement une fois »,

× pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, X_i la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions du numéro i,

× $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Z_i$ où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la v.a.r. Z_i est la **v.a.r. indicatrice de l'événement** $\{X_i = 0\}$ (on pourra noter $Z_i = \mathbb{1}_{\{X_i=0\}}$), à savoir la v.a.r. définie par :

$$Z_i \ : \ \begin{array}{ccl} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } X_i(\omega) = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

1. Calculer la probabilité de l'événement A_n.

2. Donner un équivalent de $\mathbb{P}(A_n)$ lorsque n tend vers l'infini.
(on pourra utiliser la formule de Stirling $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\ \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$)

Dans toutes les questions suivantes, le nombre n est fixé.

3. ***a)*** Quelle est la loi de X_i ?

b) Pour $(j, k) \in \mathbb{N}^2$, calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{\{X_1+\ldots+X_{n-1}=j\}}\big(\{X_n = k\}\big)$.
Les variables aléatoires de la famille $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont-elles indépendantes ?

4. Que représente $\dfrac{S_n}{n}$? Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$ puis en donner un équivalent lorsque $n \to +\infty$.

5. On note S'_n le nombre de numéros sortis exactement une fois lors d'une partie et S''_n le nombre de numéros sortis au moins deux fois lors d'une partie.
Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{S'_n}{n}\right)$ et $\mathbb{E}\left(\dfrac{S''_n}{n}\right)$.

VII. Oral - CCINP MP

Exercice 20 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

Soit $p \in \,]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.

On considère N variables aléatoires X_1, X_2, …, X_N définies sur un même espace probabilisé $\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}\big)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer $\mathbb{P}\big(\{X_i \leqslant n\}\big)$, puis $\mathbb{P}\big(\{X_i > n\}\big)$.

2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} (X_i)$, c'est-à-dire :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \min\ \big(X_1(\omega), \ldots, X_N(\omega)\big)$$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}\big(\{Y > n\}\big)$.
En déduire $\mathbb{P}\big(\{Y \leqslant n\}\big)$ puis $\mathbb{P}\big(\{Y = n\}\big)$.

b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 21 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}\big((X,Y) = (j,k)\big) \ = \ \frac{(j+k)\ \left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\ j!\ k!}$$

1. ***a)*** Déterminer la loi de la v.a.r. X (on pourra penser à utiliser le système complet d'événements $\big(\{Y = k\}\big)_{k \in \mathbb{N}}$), puis celle de la v.a.r. Y.

b) Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?

2. Prouver que $\mathbb{E}\big(2^{X+Y}\big)$ existe et la calculer.

Exercice 22 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}\big(\{X = i\} \cap \{Y = j\}\big) \ = \ \frac{1}{\mathrm{e}\ 2^{i+1}\ j!}$$

1. Déterminer les lois de X et de Y.

2. ***a)*** Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.

b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.

3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

4. Calculer $\mathbb{P}\big(\{X = Y\}\big)$.

Exercice 23 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On admet, dans cet exercice, que : $\forall q \in \mathbb{N}$, $\forall x \in\ ]-1,1[$, la série $\sum\limits_{k\geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et que :

$$\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$$

Soit $p \in\ ]0,1[$.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On suppose que la loi de probabilité du couple (X,Y) est donnée par :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}\big(\{X=k\} \cap \{Y=n\}\big) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n p\,(1-p)^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.

2. ***a)*** Déterminer la loi de Y.

b) Prouver que $1+Y$ suit une loi géométrique.

c) Déterminer l'espérance de Y.

3. Déterminer la loi de X.

Exercice 24 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.

À l'instant $t=0$, il se trouve au point A.

Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.

L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

× A_n l'événement « l'animal est en A après son $n^{\text{ème}}$ trajet ».

× B_n l'événement « l'animal est en B après son $n^{\text{ème}}$ trajet ».

× C_n l'événement « l'animal est en C après son $n^{\text{ème}}$ trajet ».

On pose $\mathbb{P}(A_n) = a_n$, $\mathbb{P}(B_n) = b_n$ et $\mathbb{P}(C_n) = c_n$.

1. ***a)*** Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

a) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.

b) Prouver que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.

c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.

Remarque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.

3. Montrer comment les résultats de la question ***2.*** peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Remarque : aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

Exercice 25 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.

L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.

L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :

× on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.

× on note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.

× si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1. Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ème}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Calculer p_1.

2. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}\, p_n + \dfrac{4}{7}$.

3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Exercice 26 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.

On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in \,]0, 1[$).

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.

2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big(\{Y = k\} \mid \{X = i\}\big)$.

b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.

Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\dbinom{n-i}{k-i}\dbinom{n}{i} = \dbinom{k}{i}\dbinom{n}{k}$.

c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 27 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit $\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}\big)$ un espace probabilisé.

1. *a)* Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \,]0, +\infty[\, \times \,]0, +\infty[$.
Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}\big)$.
On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.

2. Soit $p \in \,]0, 1[$. Soit $\lambda \in \,]0, +\infty[$.
Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}\big)$.
On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $\{Y = m\}$ est une loi binomiale de paramètre (m, p).
Déterminer la loi de X.

Exercice 28 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.

a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.

a) Déterminer la loi de X.

b) Déterminer la loi de Y.

Exercice 29 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.

On lance simultanément les n boules.

Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.

Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.

On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.

2. *a)* Déterminer la probabilité $\mathbb{P}\big(\{X=2\}\big)$.

b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.

3. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X)$. Interpréter ce résultat.

Exercice 30 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.

2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).
Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{2}$.

a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 31 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit $n \in N^*$.

Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.

On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.

2. Déterminer la loi de Y.

Exercice 32 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soient $n \in N^*$ et E un ensemble possédant n éléments.

On désigne par $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in \big(\mathscr{P}(E)\big)^2$ tels que $A \subset B$.

2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in \big(\mathscr{P}(E)\big)^2$ tels que $A \cap B = \varnothing$.

3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in \big(\mathscr{P}(E)\big)^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifiant $A \cup B \cup C = E$

Exercice 33 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big(\,\{X = n\}\,\big) = \dfrac{\lambda}{n\,(n+1)\,(n+2)}$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = x(x+1)(x+2)$.

2. Calculer λ.

3. Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.

4. La variable X admet-elle une variance ? Justifier.

Exercice 34

Dans la suite, on note $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E (on rappelle $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$).

On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ et :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\chi_f(X)$ et en déduire $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$.

2. ***a)*** Déterminer $\mathrm{Ker}\,\big(f - \mathrm{id}_E\big)$.

b) Déterminer $\mathrm{Ker}\,\big(f - 2\,\mathrm{id}_E\big)$.

3. Déterminer $\mathrm{Ker}\,\big(\ (f - \mathrm{id}_E)^2\ \big)$.

4. On note $\mathscr{B}'$ la famille obtenue par concaténation des vecteurs apparaissant dans la base de $\mathrm{Ker}\,\big(f - 2\,\mathrm{id}_E\big)$ et $\mathrm{Ker}\,\big(\ (f - \mathrm{id}_E)^2\ \big)$.

5. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$. Commenter la forme obtenue.

Exercice 35

Dans la suite, on note $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E (on rappelle $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$).

On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ et :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\chi_f(X)$ et en déduire $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$.

2. Déterminer $\mathrm{Ker}\,\big(f - \mathrm{id}_E\big)$.

3. On note : $u_1 = (f - \mathrm{id}_E)(e_1)$, $u_2 = e_1 + e_3$.
Démontrer que $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, e_1)$ est une base de E.

4. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.

Exercice 36

Dans la suite, on note $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E (on rappelle $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$).

On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ et :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\chi_f(X)$ et en déduire $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$.

2. ***a)*** Déterminer une base (u) de $\mathrm{Ker}\,\big(f - \mathrm{id}_E\big)$.

b) Déterminer une base (v) de $\mathrm{Ker}\,\big(f - 4\,\mathrm{id}_E\big)$.

c) Déterminer une base (w) de $\mathrm{Ker}\,\big(f\big)$.

3. On note $\mathscr{B}' = (u, v, w)$. Démontrer que c'est une base de E.

4. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$. Commenter la forme obtenue.