Colles

semaine 13 : 02 décembre - 07 décembre

Questions de cours

Exercice 1
La convergence uniforme permet d'intervertir les symboles $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et $\displaystyle\int_a^b$ (cas des suites de fonctions).

Exercice 2
Condition nécessaire de convergence uniforme d'une **série de fonctions**.

Exercice 3
Démontrer que la continuité est transmise par convergence uniforme (cas des suites de fonctions).

Suites de fonctions

Exercice 4
Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions (f_n) dans les cas suivants :

1. $f_n(x) = n^2x^n(1-x)$ sur $I = [0,1]$, ou sur $J = [0,a]$ où $0 < a < 1$.

2. $f_n(x) = (3x^2 - 2x^3)^n$ sur $I = [0,1]$, ou sur $J = [0,a]$ où $0 < a < 1$.

3. $f_n(x) = n^2x$ si $|x| \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $f_n(x) = \dfrac{1}{x}$ si $|x| > \dfrac{1}{n}$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 5
Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n : x \mapsto \sin\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)x\right)$$

Exercice 6
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \in [0,1] \mapsto \sin\left(n\,x\,\mathrm{e}^{-nx}\right)$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f.

2. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[a,1]$ si $a > 0$.

3. Y a-t-il convergence uniforme sur $[0,1]$?

Exercice 7
On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, l'application $f_n : t \mapsto n\cos(t)\sin^n(t)$.

Étudier la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$.

Exercice 8
Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes

1. $f_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$ sur $]-1,1[$,

2. $g_n(x) = nx^n\,\ln(x)$, $g_n(0) = 0$, sur $[0,1]$,

3. $h_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}\,\sin(2nx)$ sur $\mathbb{R}_+$.

Intégration des suites de fonctions

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x\left(1 - \frac{\lfloor x \rfloor}{n}\right)$ si $0 \leqslant x \leqslant n$ et $f_n(x) = 0$ si $x > n$.

1. Déterminer la limite simple de (f_n). Y a-t-il convergence uniforme ?

2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx$.

Exercice 10

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{n}\right)}{x\left(\operatorname{ch}(x)\right)^2}\, dx$.

1. Justifier l'existence de I_n.

2. Déterminer la limite de (I_n), puis de (nI_n) quand n tend vers l'infini.

Exercice 11

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^1 (1-x)^n\, \mathrm{e}^{-2x}\, dx$.

1. Montrer que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.

2. Trouver une relation entre I_n et I_{n+1}. En déduire la limite de $(n\, I_n)$.

3. Trouver a, b, c tels que $I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 12

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie par :

$$f_n \;:\; \begin{array}{ccc} t & \mapsto & \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t) & si\ t \in \left]0, n\right] \\ 0 & sinon \end{cases} \\ \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

1. Déterminer la limite simple de la suite de fonctions (f_n).

2. Montrer que $\int_0^{+\infty} \ln(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t)\, dt$.

3. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$. Montrer que $\int_0^{+\infty} \ln(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt = -\gamma$.

Indications : procéder au changement de variable $x = 1 - \frac{t}{n}$, puis faire une IPP.

Exercice 13

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $f_n : x \mapsto 3^n \left(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}\right)$.

1. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $[0, 1]$.

2. Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$ et $\int_0^1 \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right) dx$.

Exercice 14

On note G l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ continues et croissantes.

Soit (g_n) une suite d'éléments de G.

On suppose que (g_n) converge simplement vers 0 sur $[0,1[$, et que $\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\ dx$ converge vers une limite non nulle a.

1. Donner un exemple d'une telle suite de fonctions.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on note $G_n(x) = \displaystyle\int_0^x g_n(t)\ dt$.
Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $\displaystyle\int_0^x G_n(t)\ dt$ tend vers 0 quand n tend vers ∞.

3. Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Montrer : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ g_n(x)\ dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a\,f(1)$.

Exercice 15

Soit (u_n) la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par :

$$u_0 : x \mapsto 1+x \quad \text{ et } \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} : x \mapsto 1 + \int_0^x u_n(t-t^2)\ dt$$

1. Montrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

2. En déduire que la suite (u_n) converge simplement sur $[0,1]$. On note u la limite.

3. Montrer que (u_n) converge uniformément vers u sur $[0,1]$, et que u n'est pas la fonction nulle.

4. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $u'(x) = u(x-x^2)$.

Exercice 16

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nx)}{n\sin^2(x)}\ dx$.

1. Montrer l'existence de I_n.

2. Montrer que $I_n \underset{\substack{n\to+\infty\\ n\to+\infty}}{\sim} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2}\ du$.

Exercice 17

On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$.

1. Expliciter une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $v_n = \ln(u_n) + \alpha\ln(n)$.
Étudier, en fonction de α, le comportement de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers ∞.

Exercice 18

Montrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \int_0^{+\infty} \sin(t^n)\ dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ dt$.

Séries de fonctions

Exercice 19

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{2\,x}{x^2+n^2}$.

On considère la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de S.

2. ***a)*** Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur tout intervalle $[-a,a]$ où $a>0$.

b) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

3. ***a)*** Démontrer : $\forall x>0,\ \pi \ \leqslant\ S(x)\ \leqslant\ \pi + \dfrac{2}{x}$.

b) En déduire la limite de S en $+\infty$.

c) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

Exercice 20

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \ln\left(1+\dfrac{x^2}{n^2}\right)$.

On considère la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de S.

2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. ***a)*** Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ 2\,x\ \arctan(x) - \ln(x^2+1)\ \leqslant\ S(x)\ \leqslant\ 2\,x\ \arctan(x)$.

b) Déterminer un équivalent de S en 0.

c) Déterminer un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 21

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n+n^2\,x^2}$.

On considère la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de S.

2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

3. ***a)*** Démontrer : $\forall x \in\ ]0,+\infty[,\ \ln\left(1+x^2\right) - 2\,\ln(x)\ \leqslant\ S(x)\ \leqslant\ \ln\left(1+x^2\right) - 2\,\ln(x) + \dfrac{1}{1+x^2}$.

b) Déterminer un équivalent de S en 0.

c) Déterminer un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 22

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $u_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^2 x + n}$.

1. Pour quels x la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ est-elle convergente ? On note $S(x)$ sa somme en cas de convergence.

2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

3. Trouver un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers l'infini.

4. Trouver un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0.

Exercice 23

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n} \arctan\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

On considère la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de S.

2. ***a)*** Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur tout intervalle $[0, a]$ où $a > 0$.

b) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

3. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 24

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a^n}{n+x}$.

1. Déterminer suivant les valeurs de a le domaine de définition de S.

2. Soit a tel que $|a| < 1$.

a) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Déterminer une relation entre $S(x+1)$ et $S(x)$.

c) Déterminer un équivalent de S en 0^+.

d) Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 25

Montrer que la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{-2nx} + \mathrm{e}^{3nx}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 26

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{n^2\ (1 + x^{2n})}$.

1. Étudier la convergence de (f_n), puis la limite de $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\, dx$.

2. Déterminer le domaine de définition de $S(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$.

3. Trouver une relation entre $S(x)$ et $S\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x \in \,]0, 1]$.

4. Étudier la continuité de S sur son domaine de définition.

5. Déterminer la limite de $S(x)$ quand x tend vers l'infini.

Exercice 27

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $f_n : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$.

1. Nature de $\sum f_n$?

2. Montrer : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(nt) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2t}$.

Exercice 28

1. Montrer que si une série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément, alors f_n est bornée à partir d'un certain rang, et converge uniformément vers 0.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $f_n : x \mapsto (-1)^n \dfrac{x^2+n}{n^2}$.
Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ mais pas uniformément.

Exercice 29

On s'intéresse à $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}}{n}$.

1. Donner le domaine de définition de S.

2. Montrer que S est dérivable sur son domaine de définition.

3. Montrer que S est monotone sur son domaine de définition.

4. Que dire de S au voisinage de $+\infty$?

Exercice 30

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

On considère la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Démontrer que S est définie sur $]-1,+\infty[$.

2. Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $]-1,+\infty[$.

3. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

4. ***a)*** Pour tout $x > -1$, exprimer le lien entre $S(x+1)$ et $S(x)$.

b) En déduire la limite et un équivalent de S en -1.

5. Démontrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$.

6. Démontrer que S est strictement monotone sur $]-1,+\infty[$.

a) Démontrer : $\forall x \in\,]-1,+\infty[,\ \dfrac{-1}{x} \leqslant 2\,S(x) \leqslant \dfrac{-1}{x+1}$.

b) Déterminer un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 31

1. Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{\mathrm{e}^t - 1}\, dt$.

2. Sachant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, montrer que $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

Exercice 32

Justifier l'existence et montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\, dx = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Oraux MP

Exercice 33 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0 \in [a,b]$.

Démontrer que f est continue en x_0.

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], g_n(x) = x^n$.
La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

Exercice 34 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $f_n : x \mapsto (x^2+1)\ \dfrac{n\,\mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonction (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\ dt$.

Exercice 35 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.

2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.

3. La série de fonctions $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

Exercice 36 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \dfrac{(-1)^n\,x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.

On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.

2. ***a)*** La fonction S est-elle continue sur D ?

b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.

c) Étudier la convergence convergence uniforme de cette série sur $[0,1]$.

Exercice 37 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication :

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A $\Rightarrow$ La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers 0 sur A

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,+\infty[, f_n(x) = n\,x^2\,\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.
La série $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$? Justifier.

Exercice 38 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^4\, x^4}$.

1. ***a)*** Prouver que $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.
La série $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a, b]$? sur $[a, +\infty[$?

c) La série $\sum f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$?

2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

3. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Exercice 39 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.
Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles.
Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\, dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$.

2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.

3. Démontrer : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\, 2^n}$.

Exercice 40 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On considère la série de fonctions $\sum u_n$ où : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], u_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}$.

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right)$.

1. Démontrer que S est dérivable sur [0, 1].

2. Calculer $S'(1)$.