Colles

semaine 14 : 11 décembre - 16 décembre

Exercices de cours

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \in [0,1] \mapsto \sin\left(n\,x\,\mathrm{e}^{-nx}\right)$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f.

2. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[a,1]$ si $a > 0$.

3. Y a-t-il convergence uniforme sur $[0,1]$?

Exercice 2

1. Lister `TOUTES` les caractérisations de la diagonalisabilité.

2. Lister `TOUTES` les conditions suffisantes de diagonalisabilité.

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$.

On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice représentative dans la base canonique $\mathscr{B}$ de E est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. Même question avec la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Réduction

Exercice 4

1. Soient B et C deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $x \in \mathbb{C}$.

  a) Montrer que si B et C sont semblables, $xI_n - B$ et $xI_n - C$ sont aussi semblables.

  b) En est-il de même pour $(xI_n - B)^{-1}$ et $(xI_n - C)^{-1}$, dans le cas où ces matrices sont inversibles ?

2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $P_A(x) = \det(xI_n - A)$ et $x \notin \mathrm{Sp}(A)$. Montrer que $\mathrm{tr}((xI_n - A)^{-1}) = \frac{P_A'(x)}{P_A(x)}$.

Exercice 5

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = A + B$.

1. La matrice B admet-elle 1 comme valeur propre ? Montrer que $B - I_n$ est inversible et donner son inverse.

2. Montrer que $AB = BA$.

Exercice 6
Soit M une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telle que M soit semblable à $2M$.

1. Quelles sont les valeurs propres de M ? Montrer que M est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.

2. On suppose M de rang 1. Montrer qu'elle est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 7
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : λ est valeur propre d'ordre m de M $\Leftrightarrow$ $\overline{\lambda}$ est valeur propre d'ordre m de M.

2. Montrer que : le spectre réel de M est vide $\Leftrightarrow$ M annule un polynôme à racines complexes non réelles.

Que dire de ces propriétés lorsque n est impair ? pair ?

Exercice 8
Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthodiagonalisable (respectivement orthotrigonalisable) s'il existe $P \in \mathcal{O}(n)$ et D diagonale (respectivement triangulaire) telles que $M = {}^tPDP$.

1. Quel est l'ensemble des matrices orthodiagonalisables ?

2. On veut déterminer l'ensemble des matrices orthotrigonalisables.

a) Déterminer les matrices orthotrigonalisables de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

b) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si le polynôme caractéristique de M est scindé dans $\mathbb{R}$, alors M est orthotrigonalisable. Conclure.

Exercice 9
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, où $n \geqslant 2$, ayant le même polynôme caractéristique P.

1. Montrer que si P a n racines distinctes, alors A et B sont semblables.

2. Montrer que ce n'est pas nécessairement le cas sinon.

Exercice 10
Soit $A \in \mathscr{M}_6(\mathbb{R})$ inversible et vérifiant $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ ainsi que $\mathrm{tr}(A) = 8$.

1. Montrer que A est diagonalisable.

2. Que peut-on dire sur les valeurs propres de A ?

3. Donner une matrice diagonale semblable à A.

4. Déterminer l'ensemble des polynômes annulateurs de A.

Exercice 11
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{id}_E$.

1. Montrer que la dimension de E est paire.

2. Montrer que f n'est pas diagonalisable.

3. Soit $x \in E$, $x \neq 0_E$. Montrer que $\mathrm{Vect}\,(x)$ n'est pas stable, et que $\mathrm{Vect}\,(x, f(x))$ est stable, par f.

4. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle f a pour matrice $\mathrm{diag}(A, A, \ldots, A)$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 12
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A^2 + A - I_n = 0_n$.

1. Montrer que les valeurs propres de A sont racines de $P(X) = X^3 - X^2 + X - 1$.

2. Que vaut $\det(A)$?

3. Calculer $\operatorname{tr}(A)$ et montrer que $\operatorname{tr}(A) \in \mathbb{N}$.

Exercice 13
Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $m_{i,i} = a$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et $m_{i,j} = b$ si $i \neq j$.

1. La matrice M est-elle diagonalisable ? Donner ses valeurs propres.

2. Quelles sont les dimensions de ses sous-espaces propres ?

3. Calculer $\det(M)$.

Exercice 14

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\operatorname{tr}(M^2) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^2$ où les λ_k sont les valeurs propres de M, répétées avec leur multiplicité.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (0) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, où $n \geqslant 3$. Déterminer les valeurs propres de A.

3. Donner une base de $\operatorname{Ker}(A)$.

Exercice 15
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec $A \neq 0$ et $\phi : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + \operatorname{tr}(AM)A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer la trace et le déterminant de ϕ.

2. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

Exercice 16

1. Soit $M \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ tel que M^2 est diagonalisable. Montrer que M est diagonalisable.

2. Soit $N = \begin{pmatrix} (0) & B \\ A & (0) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$, où A, $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

   a) Montrer que $N \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ et déterminer N^{-1}.

   b) Calculer N^2.
   Décrire $\mathrm{Sp}(N^2)$ en fonction de $\mathrm{Sp}(AB)$.
   Indication : on pourra justifier que AB et BA sont semblables.

   c) Montrer que si N est diagonalisable, alors AB est diagonalisable. Étudier la réciproque.

Exercice 17

- Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieurs ou égal à n, et on désigne par $\mathscr{B} = (P_0, \dots, P_n)$ sa base canonique (pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P_i(X) = X^i$).
- Dans la suite, a désigne un réel quelconque.
- Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose : $\big(\Psi_a(P)\big)(X) = 2P(X) + (X - a)\,P'(X)$.
- Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on définit également la fonction $\Phi_a(P)$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi_a(P)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-a)^2} \displaystyle\int_a^x (t-a)\,P(t)\,dt & \text{si } x \neq a, \\[2ex] \dfrac{P(a)}{2} & \text{si } x = a. \end{cases}$$

- Enfin on définit, pour tout k de $[\![0, n]\!]$, le polynôme Q_k par : $Q_k(X) = (X - a)^k$.

1. Montrer que l'application $\Psi_a : P \mapsto \Psi_a(P)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Déterminer la matrice de Ψ_a dans la base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. ***a)*** Montrer que Ψ_a est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

b) Justifier que Ψ_a est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Calculer, pour tout k de $[\![0, n]\!]$, $\Psi_a(Q_k)$.

d) En déduire une base de chacun des sous-espaces propres de Ψ_a.

4. ***a)*** Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\big((X-a)^2 P(X)\big)'$ en fonction de $\big(\Psi_a(P)\big)(X)$.

b) En déduire, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$: $\Phi_a\big(\Psi_a(P)\big) = P$.

c) En déduire que $\Phi_a : P \mapsto \Phi_a(P)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $\Phi_a^{-1} = \Psi_a$.

d) Montrer que Φ_a est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

Exercice 18

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et Id l'application identité de E.
L'objet de l'exercice est l'étude des endomorphismes f de E vérifiant l'équation $(*)$: $f \circ f = 4\,\mathrm{Id}$.

A. Étude du cas $\mathbf{n = 2}$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit u le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $u = \big(\sqrt{2} - 2,\ \sqrt{2}\big)$.

1. Montrer que f vérifie l'équation $(*)$, puis préciser le noyau et l'image de f.

2. On note $F = \mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Im}\,(f - 2\,\mathrm{Id})$.

a) Montrer que G est engendré par le vecteur u.
En déduire la dimension de F et donner une base de F. On notera v le vecteur de cette base.

b) Montrer que $G = \mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id})$.

3. ***a)*** Justifier que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que f est diagonalisable ; préciser les valeurs propres de f et donner la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

B. Étude du cas général

On se place désormais dans le cas où n est supérieur ou égal à 2, et on considère un endomorphisme f de E vérifiant l'équation $(*)$.

4. a) Justifier que f est un automorphisme de E et exprimer l'automorphisme réciproque f^{-1} en fonction de f.

b) Déterminer les valeurs propres possibles de f.

c) Vérifier que $2\,\mathrm{Id}$ et $-2\,\mathrm{Id}$ satisfont l'équation $(*)$.

On suppose dans la suite de l'exercice que $f \neq 2\,\mathrm{Id}$ et $f \neq -2\,\mathrm{Id}$ et on note $F = \mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Im}\,(f - 2\,\mathrm{Id})$.

5. Soit x un élément de E. Montrer que $(f(x) - 2x) \in \mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id})$ et que $(f(x) + 2x) \in F$.
En déduire que $G \subset \mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id})$ et que $\mathrm{Im}\,(f + 2\,\mathrm{Id}) \subset F$.
Montrer que 2 et -2 sont les valeurs propres de f.

6. Soit x un vecteur de $\mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id})$.

a) Exprimer $(f - 2\,\mathrm{Id})(x)$ en fonction de x uniquement.
En déduire que x appartient à G, puis que $G = \mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id})$.

b) Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 19

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.
Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\big(f(P)\big)(X) = -3\,X\,P(X) + X^2\,P'(X), \text{ où } P' \text{ est la dérivée du polynôme } P$$

1. a) Rappeler la dimension de E.

b) Montrer que f est un endomorphisme de E.

c) Déterminer la matrice M de f dans 1a base canonique de E.

d) La matrice M est-elle inversible ?
Est-elle diagonalisable ? Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M^n.

e) Préciser le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

f) Déterminer l'image $\mathrm{Im}(f)$ de f.

2. On note id_E et 0_{LLE} respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de E, et pour tout endomorphisme v de E, on pose $v^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $v^k = v \circ v^{k-1}$.
Soit u et g deux endomorphismes de E tels que : $u^4 = 0_E$, $u^3 \neq 0_E$ et $g = \mathrm{id}_E + u + u^2 + u^3$.

a) Soit P un polynôme de E tel que $P \notin \mathrm{Ker}\,\big(u^3\big)$.
Montrer que la famille $\big(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\big)$ est une base de E.

b) Montrer que g est un automorphisme de E. Déterminer l'automorphisme réciproque g^{-1} en fonction de u.

c) Établir l'égalité : $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}\,(g - \mathrm{id}_E)$.

d) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g.

Exercice 20

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrés à n lignes et n colonnes à coefficients réels et B_n l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou à 1.

1. *Exemple 1.* Soit A la matrice de B_2 définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- ***a)*** Calculer la matrice A^2.
- ***b)*** Quelles sont les valeurs propres de A ?
- ***c)*** La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. *Exemple 2.* Soit B la matrice de B_3 définie par : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- ***a)*** Calculer $P^{-1}BP$
- ***b)*** Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de B.

3. ***a)*** Combien existe-t-il de matrices appartenant à B_n ?

- ***b)*** Combien existe-t-il de matrices de B_n dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1 ?

4. Dans cette question, n est un entier supérieur ou égal à 2.
Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. On note :

- id l'endomorphisme identité de E ;
- F le noyau de l'endomorphisme $(u + \mathrm{id})$ et G le noyau de l'endomorphisme $(u - \mathrm{id})$;
- p la dimension de F et q la dimension de G.

On suppose que $u \circ u = \mathrm{id}$.

- ***a)*** Justifier que l'image de $(u - \mathrm{id})$ est incluse dans F.
- ***b)*** En déduire l'inégalité : $p + q \geqslant n$.
  On suppose désormais que $1 \leqslant p < q$.
  Soit $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ une base de F et $(g_1, g_2, \ldots, g_q)$ une base de G.
- ***c)*** Justifier que $(f_1, f_2, \ldots, f_p,\ g_1, g_2, \ldots, g_q)$ est une base de E.
- ***d)*** Calculer $u(g_1 - f_1)$ et $u(g_1 + f_1)$.
- ***e)*** Trouver une base de E dans laquelle la matrice de u appartient à B_n.