Colles

semaine 14 : 11 décembre - 16 décembre

Exercices de cours

Exercice 1

La convergence uniforme permet d'intervertir les symboles $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et $\displaystyle\int_a^b$ (cas des suites de fonctions).

Exercice 2

Condition nécessaire de convergence uniforme d'une **série de fonctions**.

Exercice 3

Démontrer que la continuité est transmise par convergence uniforme (cas des suites de fonctions).

Suites de fonctions

Exercice 4

Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions (f_n) dans les cas suivants :

1. $f_n(x) = n^2x^n(1-x)$ sur $I = [0,1]$, ou sur $J = [0,a]$ où $0 < a < 1$.

2. $f_n(x) = (3x^2 - 2x^3)^n$ sur $I = [0,1]$, ou sur $J = [0,a]$ où $0 < a < 1$.

3. $f_n(x) = n^2x$ si $|x| \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $f_n(x) = \dfrac{1}{x}$ si $|x| > \dfrac{1}{n}$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 5

Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n : x \mapsto \sin\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)x\right)$$

Exercice 6

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \in [0,1] \mapsto \sin\left(n\,x\,\mathrm{e}^{-nx}\right)$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f.

2. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[a,1]$ si $a > 0$.

3. Y a-t-il convergence uniforme sur $[0,1]$?

Exercice 7

On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, l'application $f_n : t \mapsto n\cos(t)\sin^n(t)$.

Étudier la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 8

Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes

1. $f_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$ sur $]-1,1[$,

2. $g_n(x) = nx^n\,\ln(x)$, $g_n(0) = 0$, sur $[0,1]$,

3. $h_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}\,\sin(2nx)$ sur $\mathbb{R}_+$.

Intégration des suites de fonctions

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x\ \left(1 - \dfrac{\lfloor x \rfloor}{n}\right)$ si $0 \leqslant x \leqslant n$ et $f_n(x) = 0$ si $x > n$.

1. Déterminer la limite simple de (f_n). Y a-t-il convergence uniforme ?

2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx$.

Exercice 10

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{n}\right)}{x\left(\operatorname{ch}(x)\right)^2}\ dx$.

1. Justifier l'existence de I_n.

2. Déterminer la limite de (I_n), puis de (nI_n) quand n tend vers l'infini.

Exercice 11

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^n\ \mathrm{e}^{-2x}\ dx$.

1. Montrer que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.

2. Trouver une relation entre I_n et I_{n+1}. En déduire la limite de $(n\, I_n)$.

3. Trouver a, b, c tels que $I_n = a + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 12

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie par :

$$f_n \quad : \quad \begin{array}{ccc} t & \mapsto & \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^{n-1}\ \ln(t) & \textit{si } t \in \,]0, n] \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases} \\ \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

1. Déterminer la limite simple de la suite de fonctions (f_n).

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\ \mathrm{e}^{-t}\ dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t)\ dt$.

3. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\ \mathrm{e}^{-t}\ dt = -\gamma$.

Indications : procéder au changement de variable $x = 1 - \dfrac{t}{n}$, puis faire une IPP.

Exercice 13

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $f_n : x \mapsto 3^n\ \left(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}\right)$.

1. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $[0, 1]$.

2. Comparer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\ dx$ et $\displaystyle\int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) dx$.

Exercice 14

On note G l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ continues et croissantes.

Soit (g_n) une suite d'éléments de G.

On suppose que (g_n) converge simplement vers 0 sur $[0,1[$, et que $\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\ dx$ converge vers une limite non nulle a.

1. Donner un exemple d'une telle suite de fonctions.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on note $G_n(x) = \displaystyle\int_0^x g_n(t)\ dt$.
Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $\displaystyle\int_0^x G_n(t)\ dt$ tend vers 0 quand n tend vers ∞.

3. Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Montrer : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ g_n(x)\ dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a\,f(1)$.

Exercice 15

Soit (u_n) la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par :

$$u_0 : x \mapsto 1+x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} : x \mapsto 1 + \int_0^x u_n(t-t^2)\ dt$$

1. Montrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

2. En déduire que la suite (u_n) converge simplement sur $[0,1]$. On note u la limite.

3. Montrer que (u_n) converge uniformément vers u sur $[0,1]$, et que u n'est pas la fonction nulle.

4. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $u'(x) = u(x-x^2)$.

Exercice 16

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nx)}{n\sin^2(x)}\ dx$.

1. Montrer l'existence de I_n.

2. Montrer que $I_n \underset{\underset{n\to+\infty}{n\to+\infty}}{\sim} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2}\ du$.

Exercice 17

On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$.

1. Expliciter une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $v_n = \ln(u_n) + \alpha\ln(n)$.
Étudier, en fonction de α, le comportement de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers ∞.

Exercice 18

Montrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\int_0^{+\infty} \sin(t^n)\ dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ dt$.

Séries de fonctions

Exercice 19

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{2\,x}{x^2+n^2}$.

On considère la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de S.

2. ***a)*** Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur tout intervalle $[-a, a]$ où $a > 0$.

b) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

3. ***a)*** Démontrer : $\forall x > 0,\ \pi \leqslant S(x) \leqslant \pi + \dfrac{2}{x}$.

b) En déduire la limite de S en $+\infty$.

c) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Exercice 20

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{n^2}\right)$.

On considère la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de S.

2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. ***a)*** Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ 2\,x \arctan(x) - \ln(x^2+1) \leqslant S(x) \leqslant 2\,x \arctan(x)$.

b) Déterminer un équivalent de S en 0.

c) Déterminer un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 21

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n + n^2\,x^2}$.

On considère la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de S.

2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

3. ***a)*** Démontrer : $\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ \ln\left(1 + x^2\right) - 2\ln(x) \leqslant S(x) \leqslant \ln\left(1 + x^2\right) - 2\ln(x) + \dfrac{1}{1+x^2}$.

b) Déterminer un équivalent de S en 0.

c) Déterminer un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 22

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $u_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^2 x + n}$.

1. Pour quels x la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ est-elle convergente ? On note $S(x)$ sa somme en cas de convergence.

2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

3. Trouver un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers l'infini.

4. Trouver un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0.

Exercice 23

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n} \arctan\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

On considère la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de S.

2. ***a)*** Démontrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge normalement sur tout intervalle $[0, a]$ où $a > 0$.

b) La série $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

3. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 24

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a^n}{n+x}$.

1. Déterminer suivant les valeurs de a le domaine de définition de S.

2. Soit a tel que $|a| < 1$.

a) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Déterminer une relation entre $S(x+1)$ et $S(x)$.

c) Déterminer un équivalent de S en 0^+.

d) Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 25

Montrer que la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{-2nx} + \mathrm{e}^{3nx}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 26

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{n^2\ (1 + x^{2n})}$.

1. Étudier la convergence de (f_n), puis la limite de $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\, dx$.

2. Déterminer le domaine de définition de $S(x) = \sum\limits_{n \geqslant 1} f_n(x)$.

3. Trouver une relation entre $S(x)$ et $S\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x \in]0, 1]$.

4. Étudier la continuité de S sur son domaine de définition.

5. Déterminer la limite de $S(x)$ quand x tend vers l'infini.

Exercice 27

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $f_n : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$.

1. Nature de $\sum f_n$?

2. Montrer : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(nt) \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2t}$.

Exercice 28

1. Montrer que si une série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément, alors f_n est bornée à partir d'un certain rang, et converge uniformément vers 0.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $f_n : x \mapsto (-1)^n \dfrac{x^2+n}{n^2}$.
Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ mais pas uniformément.

Exercice 29

On s'intéresse à $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}}{n}$.

1. Donner le domaine de définition de S.

2. Montrer que S est dérivable sur son domaine de définition.

3. Montrer que S est monotone sur son domaine de définition.

4. Que dire de S au voisinage de $+\infty$?

Exercice 30

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

On considère la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Démontrer que S est définie sur $]-1,+\infty[$.

2. Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $]-1,+\infty[$.

3. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

4. ***a)*** Pour tout $x > -1$, exprimer le lien entre $S(x+1)$ et $S(x)$.

   b) En déduire la limite et un équivalent de S en -1.

5. Démontrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$.

6. Démontrer que S est strictement monotone sur $]-1,+\infty[$.

   a) Démontrer : $\forall x \in\ ]-1,+\infty[,\ \dfrac{-1}{x} \ \leqslant\ 2\,S(x) \ \leqslant\ \dfrac{-1}{x+1}$.

   b) Déterminer un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 31

1. Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{\mathrm{e}^t - 1}\, dt$.

2. Sachant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, montrer que $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

Exercice 32

Justifier l'existence et montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\, dx = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Oraux MP

Exercice 33 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0 \in [a,b]$.

Démontrer que f est continue en x_0.

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], g_n(x) = x^n$.
La suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

Exercice 34 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $f_n : x \mapsto (x^2+1)\,\dfrac{n\,\mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonction (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt$.

Exercice 35 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.

2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.

3. La série de fonctions $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

Exercice 36 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \dfrac{(-1)^n\,x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.

On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.

2. ***a)*** La fonction S est-elle continue sur D ?

b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.

c) Étudier la convergence convergence uniforme de cette série sur $[0,1]$.

Exercice 37 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication :

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A	$\Rightarrow$	La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers 0 sur A

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,+\infty[, f_n(x) = n\,x^2\,\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.
La série $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$? Justifier.

Exercice 38 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4\,x^4}$.

1. ***a)*** Prouver que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.
La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a,+\infty[$?

c) La série $\sum f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?

2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 39 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.
Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\ dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$.

2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.

3. Démontrer : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,2^n}$.

Exercice 40 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On considère la série de fonctions $\sum u_n$ où : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], u_n(x) = \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}$.

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right)$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0,\,1]$.

2. Calculer $S'(1)$.

Réduction

Exercice 41

1. Soient B et C deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, et $x \in \mathbb{C}$.

a) Montrer que si B et C sont semblables, $xI_n - B$ et $xI_n - C$ sont aussi semblables.

b) En est-il de même pour $(xI_n - B)^{-1}$ et $(xI_n - C)^{-1}$, dans le cas où ces matrices sont inversibles ?

2. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $P_A(x) = \det(xI_n - A)$ et $x \notin \mathrm{Sp}(A)$. Montrer que $\mathrm{tr}((xI_n - A)^{-1}) = \dfrac{P_A'(x)}{P_A(x)}$.

Exercice 42

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = A + B$.

1. La matrice B admet-elle 1 comme valeur propre ?
Montrer que $B - I_n$ est inversible et donner son inverse.

2. Montrer que $AB = BA$.

Exercice 43
Soit M une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telle que M soit semblable à $2M$.

1. Quelles sont les valeurs propres de M ? Montrer que M est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.

2. On suppose M de rang 1. Montrer qu'elle est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 44
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que : λ est valeur propre d'ordre m de $M \iff \overline{\lambda}$ est valeur propre d'ordre m de M.

2. Montrer que :
Le spectre réel de M est vide $\iff$ M annule un polynôme à racines complexes non réelles.
Que dire de ces propriétés lorsque n est impair ? pair ?

Exercice 45
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, où $n \geqslant 2$, ayant le même polynôme caractéristique P.

1. Montrer que si P a n racines distinctes, alors A et B sont semblables.

2. Montrer que ce n'est pas nécessairement le cas sinon.

Exercice 46
Soit $A \in \mathscr{M}_6(\mathbb{R})$ inversible et vérifiant $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ ainsi que $\operatorname{tr}(A) = 8$.

1. Montrer que A est diagonalisable.

2. Que peut-on dire sur les valeurs propres de A ?

3. Donner une matrice diagonale semblable à A.

4. Déterminer l'ensemble des polynômes annulateurs de A.

Exercice 47
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{id}_E$.

1. Montrer que la dimension de E est paire.

2. Montrer que f n'est pas diagonalisable.

3. Soit $x \in E$, $x \neq 0_E$. Montrer que $\operatorname{Vect}(x)$ n'est pas stable, et que $\operatorname{Vect}(x, f(x))$ est stable, par f.

4. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle f a pour matrice $\operatorname{diag}(A, A, \ldots, A)$, où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 48
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A^2 + A - I_n = 0_n$.

1. Montrer que les valeurs propres de A sont racines de $P(X) = X^3 - X^2 + X - 1$.

2. Que vaut $\det(A)$?

3. Calculer $\operatorname{tr}(A)$ et montrer que $\operatorname{tr}(A) \in \mathbb{N}$.

Exercice 49

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $m_{i,i} = a$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et $m_{i,j} = b$ si $i \neq j$.

1. La matrice M est-elle diagonalisable ? Donner ses valeurs propres.

2. Quelles sont les dimensions de ses sous-espaces propres ?

3. Calculer $\det(M)$.

Exercice 50

1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{tr}(M^2) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^2$ où les λ_k sont les valeurs propres de M, répétées avec leur multiplicité.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (0) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, où $n \geqslant 3$. Déterminer les valeurs propres de A.

3. Donner une base de $\mathrm{Ker}(A)$.

Exercice 51

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec $A \neq 0$ et $\phi : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + \mathrm{tr}(AM)A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer la trace et le déterminant de ϕ.

2. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

Exercice 52

1. Soit $M \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ tel que M^2 est diagonalisable. Montrer que M est diagonalisable.

2. Soit $N = \begin{pmatrix} (0) & B \\ A & (0) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$, où A, $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que $N \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ et déterminer N^{-1}.

b) Calculer N^2.
Décrire $\mathrm{Sp}(N^2)$ en fonction de $\mathrm{Sp}(AB)$.
Indication : on pourra justifier que AB et BA sont semblables.

c) Montrer que si N est diagonalisable, alors AB est diagonalisable. Étudier la réciproque.

Exercices d'oraux CCINP

Exercice 53 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.

On pose : $\forall P \in E,\ f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :

a) sans utiliser de matrice f,

b) en utilisant une matrice f.

2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 54 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$f : M \mapsto AM$$

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

2. L'endomorphisme f est-il surjectif ?

3. Déterminer une base de $\operatorname{Im}(f)$.

4. A-t-on : $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$?

Exercice 55 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\,\mathrm{id} = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. ***a)*** Prouver que : $E = \operatorname{Ker}(f + \mathrm{id}) \oplus \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{id})$.

b) Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
Prouver que : $\operatorname{Im}(f + \mathrm{id}) = \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{id})$.

Exercice 56 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Démontrer : $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ \big(PQ\big)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

2. ***a)*** Démontrer : $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.

b) Démontrer que, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$:

$$P \text{ polynôme annulateur de } u \qquad \Rightarrow \quad PQ \text{ polynôme annulateur de } u$$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Écrire le polynôme caractéristique de A, puis en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

Exercice 57 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Démontrer : $E = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f) \ \Rightarrow\ \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}\big(f^2\big)$.

2. ***a)*** Démontrer : $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}\big(f^2\big) \ \Leftrightarrow\ \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}\big(f^2\big)$.

b) Démontrer : $E = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f) \ \Rightarrow\ \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}\big(f^2\big)$.

Exercice 58 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. ***a)*** sans calcul,

b) en calculant directement le déterminant $\det\big(\lambda I_3 - A\big)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,

c) en utilisant le rang de la matrice,

d) en calculant A^2.

2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée.
Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exercice 59 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.

La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 60 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Déterminer le rang de A.

2. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 61 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = a\, I_3 + b\, A + c\, A^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3. Déduire de la question ***1.*** les éléments propres de B.

Exercice 62 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit n un entier naturel non nul.

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, et soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

On suppose : $f(e_1) = \ldots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donnée de E.

1. Donner le rang de f.

2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
(discuter en fonction du vecteur v)

Exercice 63 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}\,(I_2, A)$.

Exercice 64 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.

b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base des vecteurs propres associés.

2 On considère le système différentiel $\begin{cases} x' &= x + 2\,z \\ y' &= y \\ z' &= 2\,x + z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$.
En utilisant la question ***1.*** et en le justifiant, résoudre ce système.

Exercice 65 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.

2. On considère, sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par $u : P \mapsto \displaystyle\int_1^X P$ et $v : P \mapsto P'$.
Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u)$. Le résultat de la question ***1.*** reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?

3. Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$.
Indication : penser à utiliser le déterminant.

Exercice 66 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.

a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\Big(1, X-a, (X-a)^2, \dots, (X-a)^n\Big)$.

b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire :

$$\begin{array}{r} a \text{ est une racine de } P \text{ d'ordre de} \\ \text{multiplicité } r \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P^{(r)}(a) \neq 0 \\ \forall k \in [\![0, r-1]\!], P^{(k)}(a) = 0 \end{array} \right.$$

2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + a\,X^2 + b\,X$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 67 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soient a_0, a_1, …, a_n, $n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si b_0, b_1, …, b_n sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant :

$$\deg(P) \leqslant n \quad \text{ et } \quad \forall i \in [\![0, n]\!], P(a_i) = b_i$$

2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque :

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ b_i = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & si\ i \neq k \\ 1 & si\ i = k \end{array} \right.$$

Exercice 68 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.

2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

Exercice 69 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

Prouver que si P annule u alors toute valeur propre de u est racine de P.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & si\ i = j \\ 1 & si\ i \neq j \end{cases}$.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ défini par : $\forall M \in E$, $u(M) = M + \mathrm{tr}(M)\ A$.

a) Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u.

b) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
Justifier vorte réponse en utilisant deux méthodes (avec ou sans la question ***1.***).

Exercice 70 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On désigne par $\mathbb{K}$ le corps des réels ou celui des complexes.

Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaire distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\begin{array}{cccc} \Phi & : & \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}^3 \\ & & P & \mapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose : $\forall k \in \{1, 2, 3\}$, $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.

a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.

3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).

4. **Application** : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1)$, $B(1, 3)$, $C(2, 1)$.
Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.