Colles

semaine 15 : 18 décembre - 23 décembre

Exercices de cours

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \in [0,1] \mapsto \sin\left(n\,x\,\mathrm{e}^{-nx}\right)$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f.

2. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[a,1]$ si $a > 0$.

3. Y a-t-il convergence uniforme sur $[0,1]$?

Exercice 2

1. Lister `TOUTES` les caractérisations de la diagonalisabilité.

2. Lister `TOUTES` les conditions suffisantes de diagonalisabilité.

3. Déterminer le polynôme caractéristique de l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ dont la matrice représentative dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3 & -8 & 10 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$.

On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice représentative dans la base canonique $\mathscr{B}$ de E est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. Même question avec la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Réduction

Exercice 4

1. Soient B et C deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $x \in \mathbb{C}$.

   a) Montrer que si B et C sont semblables, $xI_n - B$ et $xI_n - C$ sont aussi semblables.

   b) En est-il de même pour $(xI_n - B)^{-1}$ et $(xI_n - C)^{-1}$, dans le cas où ces matrices sont inversibles ?

2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $P_A(x) = \det(xI_n - A)$ et $x \notin \mathrm{Sp}(A)$. Montrer que $\mathrm{tr}((xI_n - A)^{-1}) = \frac{P_A'(x)}{P_A(x)}$.

Exercice 5

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = A + B$.

1. La matrice B admet-elle 1 comme valeur propre ?
Montrer que $B - I_n$ est inversible et donner son inverse.

2. Montrer que $AB = BA$.

Exercice 6
Soit M une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telle que M soit semblable à $2M$.

1. Quelles sont les valeurs propres de M ? Montrer que M est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.

2. On suppose M de rang 1. Montrer qu'elle est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 7
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.
Montrer : λ est valeur propre d'ordre m de $M \iff \overline{\lambda}$ est valeur propre d'ordre m de M.

2. Montrer : le spectre réel de M est vide $\iff$ M annule un polynôme à racines complexes non réelles.
Que dire de ces propriétés lorsque n est impair ? pair ?

Exercice 8
Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthodiagonalisable (respectivement orthotrigonalisable) s'il existe $P \in \mathcal{O}(n)$ et D diagonale (respectivement triangulaire) telles que $M = {}^tPDP$.

1. Quel est l'ensemble des matrices orthodiagonalisables ?

2. On veut déterminer l'ensemble des matrices orthotrigonalisables.

  a) Déterminer les matrices orthotrigonalisables de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

  b) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si le polynôme caractéristique de M est scindé dans $\mathbb{R}$, alors M est orthotrigonalisable. Conclure.

Exercice 9
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, où $n \geqslant 2$, ayant le même polynôme caractéristique P.

1. Montrer que si P a n racines distinctes, alors A et B sont semblables.

2. Montrer que ce n'est pas nécessairement le cas sinon.

Exercice 10
Soit $A \in \mathscr{M}_6(\mathbb{R})$ inversible et vérifiant $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ ainsi que $\operatorname{tr}(A) = 8$.

1. Montrer que A est diagonalisable.

2. Que peut-on dire sur les valeurs propres de A ?

3. Donner une matrice diagonale semblable à A.

4. Déterminer l'ensemble des polynômes annulateurs de A.

Exercice 11
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{id}_E$.

1. Montrer que la dimension de E est paire.

2. Montrer que f n'est pas diagonalisable.

3. Soit $x \in E$, $x \neq 0_E$. Montrer que $\mathrm{Vect}\,(x)$ n'est pas stable, et que $\mathrm{Vect}\,(x, f(x))$ est stable, par f.

4. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle f a pour matrice $\mathrm{diag}(A, A, \ldots, A)$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 12
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A^2 + A - I_n = 0_n$.

1. Montrer que les valeurs propres de A sont racines de $P(X) = X^3 - X^2 + X - 1$.
2. Que vaut $\det(A)$?
3. Calculer $\operatorname{tr}(A)$ et montrer que $\operatorname{tr}(A) \in \mathbb{N}$.

Exercice 13
Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $m_{i,i} = a$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et $m_{i,j} = b$ si $i \neq j$.

1. La matrice M est-elle diagonalisable ? Donner ses valeurs propres.
2. Quelles sont les dimensions de ses sous-espaces propres ?
3. Calculer $\det(M)$.

Exercice 14

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\operatorname{tr}(M^2) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$ où les λ_k sont les valeurs propres de M, répétées avec leur multiplicité.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (0) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, où $n \geqslant 3$. Déterminer les valeurs propres de A.
3. Donner une base de $\operatorname{Ker}(A)$.

Exercice 15
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec $A \neq 0$ et $\phi : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + \operatorname{tr}(AM)A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer la trace et le déterminant de ϕ.
2. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

Exercice 16

1. Soit $M \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ tel que M^2 est diagonalisable. Montrer que M est diagonalisable.
2. Soit $N = \begin{pmatrix} (0) & B \\ A & (0) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$, où A, $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
   - ***a)*** Montrer que $N \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ et déterminer N^{-1}.
   - ***b)*** Calculer N^2.
     Décrire $\operatorname{Sp}(N^2)$ en fonction de $\operatorname{Sp}(AB)$.
     Indication : on pourra justifier que AB et BA sont semblables.
   - ***c)*** Montrer que si N est diagonalisable, alors AB est diagonalisable. Étudier la réciproque.

Exercice 17

- Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieurs ou égal à n, et on désigne par $\mathscr{B} = (P_0, \dots, P_n)$ sa base canonique (pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P_i(X) = X^i$).
- Dans la suite, a désigne un réel quelconque.
- Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose : $\big(\Psi_a(P)\big)(X) = 2P(X) + (X - a)\,P'(X)$.
- Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on définit également la fonction $\Phi_a(P)$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi_a(P)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-a)^2} \displaystyle\int_a^x (t-a)\,P(t)\,dt & \text{si } x \neq a, \\[2ex] \dfrac{P(a)}{2} & \text{si } x = a. \end{cases}$$

- Enfin on définit, pour tout k de $[\![0, n]\!]$, le polynôme Q_k par : $Q_k(X) = (X - a)^k$.

1. Montrer que l'application $\Psi_a : P \mapsto \Psi_a(P)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Déterminer la matrice de Ψ_a dans la base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. ***a)*** Montrer que Ψ_a est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

b) Justifier que Ψ_a est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Calculer, pour tout k de $[\![0, n]\!]$, $\Psi_a(Q_k)$.

d) En déduire une base de chacun des sous-espaces propres de Ψ_a.

4. ***a)*** Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\big((X-a)^2 P(X)\big)'$ en fonction de $\big(\Psi_a(P)\big)(X)$.

b) En déduire, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$: $\Phi_a\big(\Psi_a(P)\big) = P$.

c) En déduire que $\Phi_a : P \mapsto \Phi_a(P)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $\Phi_a^{-1} = \Psi_a$.

d) Montrer que Φ_a est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

Exercice 18

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et Id l'application identité de E.
L'objet de l'exercice est l'étude des endomorphismes f de E vérifiant l'équation $(*)$: $f \circ f = 4\,\mathrm{Id}$.

A. Étude du cas $\mathbf{n = 2}$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit u le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $u = \big(\sqrt{2} - 2,\ \sqrt{2}\big)$.

1. Montrer que f vérifie l'équation $(*)$, puis préciser le noyau et l'image de f.

2. On note $F = \mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Im}\,(f - 2\,\mathrm{Id})$.

a) Montrer que G est engendré par le vecteur u.
En déduire la dimension de F et donner une base de F. On notera v le vecteur de cette base.

b) Montrer que $G = \mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id})$.

3. ***a)*** Justifier que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que f est diagonalisable ; préciser les valeurs propres de f et donner la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

B. Étude du cas général

On se place désormais dans le cas où n est supérieur ou égal à 2, et on considère un endomorphisme f de E vérifiant l'équation $(*)$.

4. ***a)*** Justifier que f est un automorphisme de E et exprimer l'automorphisme réciproque f^{-1} en fonction de f.

b) Déterminer les valeurs propres possibles de f.

c) Vérifier que $2\,\mathrm{Id}$ et $-2\,\mathrm{Id}$ satisfont l'équation $(*)$.

On suppose dans la suite de l'exercice que $f \neq 2\,\mathrm{Id}$ et $f \neq -2\,\mathrm{Id}$ et on note $F = \mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Im}\,(f - 2\,\mathrm{Id})$.

5. Soit x un élément de E. Montrer que $(f\,(x) - 2x) \in \mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id})$ et que $(f\,(x) + 2x) \in F$.
En déduire que $G \subset \mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id})$ et que $\mathrm{Im}\,(f + 2\,\mathrm{Id}) \subset F$.
Montrer que 2 et -2 sont les valeurs propres de f.

6. Soit x un vecteur de $\mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id})$.

a) Exprimer $(f - 2\,\mathrm{Id})\,(x)$ en fonction de x uniquement.
En déduire que x appartient à G, puis que $G = \mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id})$.

b) Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 19
On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.
Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\big(f(P)\big)(X) = -3\,X\,P(X) + X^2\,P'(X), \text{ où } P' \text{ est la dérivée du polynôme } P$$

1. ***a)*** Rappeler la dimension de E.

b) Montrer que f est un endomorphisme de E.

c) Déterminer la matrice M de f dans 1a base canonique de E.

d) La matrice M est-elle inversible ?
Est-elle diagonalisable ? Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M^n.

e) Préciser le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

f) Déterminer l'image $\mathrm{Im}(f)$ de f.

2. On note id_E et 0_{LLE} respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de E, et pour tout endomorphisme v de E, on pose $v^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $v^k = v \circ v^{k-1}$.
Soit u et g deux endomorphismes de E tels que : $u^4 = 0_E$, $u^3 \neq 0_E$ et $g = \mathrm{id}_E + u + u^2 + u^3$.

a) Soit P un polynôme de E tel que $P \notin \mathrm{Ker}\,\big(u^3\big)$.
Montrer que la famille $\big(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\big)$ est une base de E.

b) Montrer que g est un automorphisme de E. Déterminer l'automorphisme réciproque g^{-1} en fonction de u.

c) Établir l'égalité : $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}\,(g - \mathrm{id}_E)$.

d) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g.

Exercice 20

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrés à n lignes et n colonnes à coefficients réels et B_n l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou à 1.

1. *Exemple 1.* Soit A la matrice de B_2 définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer la matrice A^2.

b) Quelles sont les valeurs propres de A ?

c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. *Exemple 2.* Soit B la matrice de B_3 définie par : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $P^{-1}BP$

b) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de B.

3. ***a)*** Combien existe-t-il de matrices appartenant à B_n ?

b) Combien existe-t-il de matrices de B_n dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1 ?

4. Dans cette question, n est un entier supérieur ou égal à 2.
Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. On note :
– id l'endomorphisme identité de E ;
– F le noyau de l'endomorphisme $(u + \mathrm{id})$ et G le noyau de l'endomorphisme $(u - \mathrm{id})$;
– p la dimension de F et q la dimension de G.
On suppose que $u \circ u = \mathrm{id}$.

a) Justifier que l'image de $(u - \mathrm{id})$ est incluse dans F.

b) En déduire l'inégalité : $p + q \geqslant n$.
On suppose désormais que $1 \leqslant p < q$.
Soit $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ une base de F et $(g_1, g_2, \ldots, g_q)$ une base de G.

c) Justifier que $(f_1, f_2, \ldots, f_p,\ g_1, g_2, \ldots, g_q)$ est une base de E.

d) Calculer $u(g_1 - f_1)$ et $u(g_1 + f_1)$.

e) Trouver une base de E dans laquelle la matrice de u appartient à B_n.

Exercice 21

Déterminer les éléments propres et réduire les matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3 & -8 & 10 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ***c)*** $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ ***d)*** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ***e)*** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \\ -4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

Exercice 22

Étudier, en fonction des paramètres, la diagonalisabilité des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} -1 & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ 2 & \alpha-2 & \alpha+1 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ***c)*** $\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 23

Soient $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$, $M=\begin{pmatrix} a & c & b\\ c & a+b & c\\ b & c & a\end{pmatrix}$ et $K=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser K.

2. Exprimer M à l'aide des puissances de K et en déduire une diagonalisation de M.

Exercice 24

Soit $A=\begin{pmatrix} 0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{pmatrix}$ où $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de degré 3 de A.

2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

3. Montrer que les valeurs propres de A^2 sont négatives ou nulles.

Exercice 25

Soit $A\in\mathscr{M}_5(\mathbb{R})$ inversible telle que $A^3-3A^2+2A=0$ et $\mathrm{tr}(A)=6$.

Déterminer le polynôme caractéristique de A.

Exercice 26

Déterminer les éléments propres et étudier la diagonalisabilité des matrices carrées de taille $n\in\mathbb{N}^*$ suivantes :

a. La matrice A dont tous les coefficients valent 1.

b. La matrice B dont le coefficient d'indice (i,j) vaut 1 si $i+j$ est pair, et 0 sinon.

c. La matrice N dont les coefficients de la première colonne, de la dernière colonne et de la diagonale sont égaux à 1, et les autres à 0.

Exercice 27

Étudier, en fonction des paramètres, la diagonalisabilité des matrices carrées de taille $n\in\mathbb{N}^*$ suivantes, et expliciter leurs éléments propres.

a. La matrice $A=(a^{i+j-2})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, où $a\in\mathbb{C}$.

b. La matrice B dont la première ligne est $(a,0,\dots,0)$, la seconde est $(1,1,\dots,1)$, et toutes les autres sont $(1,0,\dots,0)$, où $a\in\mathbb{C}$.

c. La matrice C avec des a sur la diagonale et des b partout ailleurs, où $(a,b)\in\mathbb{C}^2$.

Exercice 28

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1 (où $n\geqslant 2$).

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $\mathrm{tr}(A)$ pour que A soit diagonalisable.

Exercice 29

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3=A+I$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

2. Montrer que A est inversible et que $\det(A)>0$.

Exercice 30

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} P & P \\ -P & P \end{pmatrix}$.

1. Montrer que si P est inversible, alors Q l'est, et donner alors Q^{-1} en fonction de P^{-1}.

2. Étudier la diagonalisabilité de B en fonction de celle de A.

Exercice 31

Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ un couple de matrices qui commutent.

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et B.

2. Montrer que si A est diagonalisable et B est nulle, alors M est diagonalisable.

3. Démontrer la réciproque.

Exercice 32

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients positifs et telle que la somme des coefficients de chaque ligne de A est égale à 1.

1. Montrer que 1 est valeur propre de A, et que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A, alors $|\lambda| \leqslant 1$.
Indication. Considérer un coefficient de module maximal dans X tel que $AX = \lambda X$.

2. On suppose les coefficients de A strictement positifs. Montrer que le sous-espace propre de A associé à 1 est une droite, et que 1 est la seule valeur propre de A de module 1.

Exercice 33

Le but de l'exercice est de caractériser les matrices carrées de même taille ayant une valeur propre commune.

Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose dans cette question que A et B ont au moins une valeur propre commune.

a) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ et $(X, Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nuls, tels que ${}^t\!AX = \alpha X$ et $BY = \alpha Y$.

b) En déduire qu'il existe $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $MA = BM$.

2. On suppose dans cette question qu'il existe M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $MA = BM$.

a. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $MP(A) = P(B)M$.

b. En déduire que A et B ont au moins une valeur propre commune.

Éléments propres et réduction des endomorphismes

Exercice 34

Soient $E = \mathbb{K}[X]$ et $u : E \to E$, $P \mapsto X(X-1)P' - XP$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.

2. Déterminer les éléments propres de u.

Exercice 35

Soit $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$.

Pour $f \in E$, on définit $\varphi(f) : [0;1] \to \mathbb{R}$ par : $\varphi(f)(0) = f(0)$ et $\varphi(f)(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$ si $x \neq 0$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

2. Montrer que 0 n'est pas une valeur propre de φ.

3. Montrer que 1 est une valeur propre de φ et trouver l'espace propre associé.

4. Trouver les autres valeurs propres.

Exercice 36

Soient $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $T \in \mathscr{L}(E)$ qui à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$w_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Déterminer les éléments propres de T.

Exercice 37

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ qui à tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le polynôme $\varphi(P)(X) = P(1 - iX)$, où $i^2 = -1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer φ^4. Montrer que φ est diagonalisable et donner les valeurs propres possibles de φ.

2. Montrer que 1 est vraiment valeur propre de φ.

3. Préciser le spectre de φ en fonction de n.

Exercice 38

Soit l'application $u : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P' - XP''$.

1. Monter que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Trouver la seule valeur propre possible λ de u.

3. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? inversible ?

4. Calculer le sous espace propre associé à λ.

Exercice 39

Soit n un entier $\geqslant 4$.

On définit $\Phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto XP'' + (X-4)P' - 3P$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Est-il diagonalisable ?

3. Déterminer la dimension puis une base du noyau de Φ.

Exercice 40

Soit $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer les éléments propres de f.

3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? inversible ?

Exercice 41

Soit $\phi : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto M + \mathrm{tr}(M)I_n$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Trouver un polynôme annulateur de ϕ de degré 2.

3. L'endomorphisme ϕ est-il diagonalisable ?

4. Donner le polynôme caractéristique et la trace de ϕ.

Exercice 42

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soit f_A l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $f_A(M) = AM$.

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(f_A) = f_{P(A)}$.

2. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si f_A l'est.

3. Montrer que $\mathrm{Sp}(f_A) = \mathrm{Sp}(A)$.

4. Expliciter χ_{f_A} en fonction de χ_A.

Exercice 43

Soit E est un espace vectoriel de dimension finie.

Soit s est une symétrie vectorielle de E. On pose pour $u \in \mathscr{L}(E)$, $\varphi(u) = \dfrac{1}{2}\,(s \circ u + u \circ s)$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$

2. Calculer φ^3 et en déduire un polynôme annulateur de φ.

3. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Exercice 44

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E.

1. Montrer que si u et v sont *simultanément diagonalisables*, c'est-à-dire s'il existe une base de diagonalisation commune à u et v, alors u et v commutent.

2. On suppose dans cette question que u et v commutent.
Montrer que v stabilise chaque sous-espace propre de u, et que l'endomorphisme qu'il y induit est diagonalisable. En déduire que u et v sont simultanément diagonalisables.

Exercice 45

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que si u est diagonalisable, alors u^2 est diagonalisable et $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$.

2. Montrer la réciproque.
Indication : montrer que si un polynôme $XP(X)$ annule u^2, alors $XP(X^2)$ annule u.

Utilisations de la réduction

Exercice 46

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le spectre de A et trouver une matrice diagonale D semblable à A.

2. Montrer que toute matrice commutant avec D est nécessairement diagonale.

3. Soit $P = X^7 + X + 1$. Déterminer les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $P(M) = A$.

Exercice 47

Déterminer les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 48

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, où $a_{i,j} = 1$ si $i + j$ est pair, $a_{i,j} = 2$ sinon.

1. Trouver les éléments propres de A.

2. Résoudre $X^2 + 2X = A$ dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

Exercice 49

Trouver les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^5 = M^2$ et $\mathrm{tr}(M) = 3$.

Exercice 50

Déterminer les matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^3 - 4M^2 - 4M = 0$ et $\mathrm{tr}(M) = 0$.

Exercice 51

On cherche les matrices symétriques M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant l'équation (1) : $M^3 + 4M^2 + 5M = 0_n$.

1. Justifier que ces matrices sont diagonalisables et que leurs valeurs propres sont racines du polynôme $P(X) = X^3 + 4X^2 + 5X$.

2. En déduire toutes les solutions symétriques de (1).

Exercice 52

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour qu'il existe $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A = S^2 + S + I_n$.

2. À quelle condition supplémentaire y a-t-il unicité d'une telle matrice S ?

Exercice 53

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme admettant n valeurs propres distinctes.

1. Montrer que u est diagonalisable et que si $f \in \mathscr{L}(E)$ commute avec u, alors toute base de diagonalisation de u est une base de diagonalisation de f.
En déduire la dimension du sous-espace $\mathcal{C}(u) = \{f \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ u = u \circ f\}$ de $\mathscr{L}(E)$.

2. Dénombrer les sous-espaces vectoriels de E stables par u.

Exercice 54

Soient $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ et $\mathcal{C}$ l'ensemble des endomorphismes $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que $g \circ f = f \circ g$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.

2. On suppose que f possède trois valeurs propres distinctes. Déterminer la dimension de $\mathcal{C}$.

3. On suppose que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Déterminer la dimension de $\mathcal{C}$.

4. Trouver f tel que $\mathcal{C}$ soit de dimension 5.

Exercice 55

Déterminer le terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et les relations de récurrence suivantes :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 5u_n + v_n - w_n, \\ v_{n+1} & = & 2u_n + 4v_n - 2w_n, \\ w_{n+1} & = & u_n - v_n + 3w_n. \end{array} \right.$$

Exercice 56

Déterminer le terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

a. $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ et $u_{n+3} = -(u_{n+2} + u_{n+1} + u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. $v_0 = 1$, $v_1 = v_2 = 0$ et $v_{n+3} = 3v_{n+2} - 4v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Indication : raisonner matriciellement pour ramener le problème au calcul des puissances d'une matrice carrée de taille 3*, et procéder par trigonalisation.*