

## Colles

semaine 16 : 08 janvier - 13 janvier

## Questions de cours

## Exercice 1

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)} dt$ .

1. Montrer que la fonction  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on note  $\Gamma_p = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt$ .

2. Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , justifier l'existence de  $\Gamma_p$  et déterminer une relation entre  $\Gamma_{p+1}$  et  $\Gamma_p$ .

## Exercice 2

Pour  $x > 0$ , on note :  $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt$ ,  $G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt$

et  $H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(t) dt$ .

1. Montrer que :  $\forall t \in \mathbb{R}_+, |\sin(t)| \leq t$ .

2. Montrer que les fonctions  $F$ ,  $G$  et  $H$  sont bien définies sur  $]0, +\infty[$ .

3. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ .

4. Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$  et exprimer  $F'$  à l'aide de  $G$ .

## Exercice 3

Pour tout  $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ , on pose  $\varphi(P, Q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} P(t) Q(t) e^{-t^2} dt$ .

Démontrer que  $\varphi$  est un produit scalaire.

## Exercices

## Exercice 4

On pose, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} t^n e^{-t^2} dt$ .

Pour tout  $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ , on pose  $\varphi(P, Q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} P(t) Q(t) e^{-t^2} dt$ .

1. Calculer  $A_n$  en distinguant deux cas selon la parité de  $n$ . Donnée :  $A_0 = 1$ .

2. Vérifier que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .

3. Calculer  $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$ .

## Exercice 5

Soit  $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$ . On pose, pour  $(f, g) \in E \times E$ ,  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) t^2 dt$ .

1. Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire.

2. Calculer  $\int_0^1 t^n \ln(t) dt$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

3. Soit  $F = \{x \mapsto ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  et  $u \in E$  telle que  $u(x) = x \ln(x)$  pour tout  $x \in ]0, 1]$ .

Déterminer le projeté orthogonal de  $u$  sur  $F$ .

4. Déterminer  $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_a^1 (at + b - t \ln(t))^2 t^2 dt$ .

**Exercice 6**

On munit l'espace  $E = \mathbb{R}_3[X]$  du produit scalaire défini par  $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x) Q(x) dx$ .

Soit  $F = \{P \in E \mid \langle X^2 - 1, P' \rangle = \langle X, P \rangle\}$  et  $Q = 1 + X + X^2 + X^3$ .

1. Vérifier que l'on définit bien ainsi un produit scalaire sur  $E$ .
2. Vérifier que  $F = \text{Vect}(X)^\perp$ .
3. Déterminer  $d(Q, F)$ .

**Exercice 7**

On munit  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  de sa structure euclidienne canonique.

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par  $a_{i,i} = -1$  et  $a_{i,j} = \frac{1}{n-1}$  si  $i \neq j$ .

1. Vérifier que pour tous  $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $\langle X \mid AY \rangle = \langle AX \mid Y \rangle$ .
2. En déduire que  $\text{Ker}(A)$  et  $\text{Im}(A)$  sont supplémentaires orthogonaux.
3. Déterminer  $\text{Ker}(A)$  et  $\text{Im}(A)$  et retrouver le résultat précédent.

**Exercice 8**

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \geq 2$ , muni d'une base orthonormée  $B = (e_1, \dots, e_n)$ .

On cherche à prouver qu'il existe  $(y_1, \dots, y_n) \in E^n$  tel que  $\forall i \neq j, \|y_i\| = \|y_i - y_j\| = 1$ .

On note  $I_n$  la matrice identité de taille  $n$  et  $J_n$  la matrice carrée de taille  $n$  dont tous les coefficients valent 1.

1. Soit  $(y_1, \dots, y_n) \in E^n$ .

On pose  $A = (a_{i,j})$  où  $a_{i,j}$  est la  $i$ -ème coordonnée de  $y_j$  dans  $B$ .

- a) Exprimer  ${}^tAA$  à l'aide du produit scalaire de  $E$ .
- b) En déduire que la famille  $(y_1, \dots, y_n)$  vérifie la propriété voulue si et seulement si :

$${}^tAA = \frac{1}{2} (I_n + J_n)$$

2. On pose  $M = \frac{1}{2}(I_n + J_n)$ .

- a) Montrer que les sous-espaces  $\text{Ker}(M - \frac{1}{2}I_n)$  et  $\text{Ker}(M - \frac{n+1}{2}I_n)$  sont supplémentaires orthogonaux.
- b) En déduire l'existence d'une matrice orthogonale  $P$  telle que  $M = {}^tPDP$ , où :

$$D = \text{Diag} \left( \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{n+1}{2} \right)$$

- c) Conclure.

**Théorème de convergence dominée****Exercice 9**

1. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}} dt$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

**Exercice 10**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ .

1. Justifier que  $I_n$  est bien définie.
2. a) Étudier la monotonie de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .  
b) Déterminer la limite de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
3. La série  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n I_n$  est-elle convergente?

**Exercice 11**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $f_n : x \mapsto \frac{e^{-x}}{1+n^2 x^2}$  et  $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ .

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(f_n)$  sur  $[0, 1]$ .
2. Soit  $a \in ]0, 1[$ . La suite de fonctions  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $[a, 1]$ ?
3. La suite de fonctions  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $[0, 1]$ ?
4. Trouver la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

**Théorème d'intégration terme à terme****Exercice 12**

1. Soient  $a$  et  $b$  deux réels donnés avec  $a < b$ .

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions continues sur  $[a, b]$ , à valeurs réelles.

Démontrer que si la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $[a, b]$  vers  $f$ , alors la suite  $\left( \int_a^b f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\int_a^b f(x) dx$ .

2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.

3. Démontrer :  $\int_0^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n}$ .

**Exercice 13**

1. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n : t \mapsto t^n \ln(t)$  est intégrable sur  $]0, 1]$  et calculer

$$I_n = \int_0^1 t^n \ln(t) dt$$

2. Démontrer que  $f : t \mapsto e^t \ln(t)$  est intégrable sur  $]0, 1]$  et :  $\int_0^1 e^t \ln(t) dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n n!}$ .

**Exercice 14**

Soit  $\sum a_n$  une série absolument convergente à termes complexes. On pose  $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $f_n : t \mapsto \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t}$ .

1. a) Justifier que la suite  $(a_n)$  est bornée.

b) Justifier que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement sur  $[0, +\infty[$ .

On admet, dans la suite de l'exercice, que  $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

2. a) Justifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $g_n : t \mapsto t^n e^{-t}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  et calculer  $\int_0^{+\infty} g_n(t) dt$ .

En déduire la convergence et la valeur de  $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$ .

b) Démontrer :  $\int_0^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ .

**Exercice 15**

On souhaite justifier l'existence et déterminer la valeur de  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(\sqrt{x})} dx$ .

1. Démontrer que la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{\operatorname{sh}(\sqrt{x})}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

2. Démontrer :  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(\sqrt{x})} dx = \int_1^0 \frac{2}{t - \frac{1}{t}} \frac{2 \ln(t)}{t} dt$ .

3. a) Calculer  $\int_0^1 | -t^{2n} \ln(t) | dt$ .

b) Démontrer :  $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \frac{\pi^2}{2}$ .

(on pourra utiliser :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ )

**Exercice 16**

1. Démontrer :  $\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t} dt = - \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ .

2. En déduire :  $\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ .

**Exercice 17**

Pour  $x > 1$ , on note :  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ .

Montrer :

$$\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$$

## Intégrales à paramètres

### Exercice 18

On note, pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , pour tout  $t \in [0, +\infty[$ ,  $f(x, t) = e^{-t} t^{x-1}$ .

1. Démontrer :  $\forall x \in ]0, +\infty[$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

On pose alors :  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ .

2. Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , exprimer  $\Gamma(x+1)$  en fonction de  $\Gamma(x)$ .

3. Démontrer que  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$  et exprimer  $\Gamma'(x)$  sous forme d'intégrale.

### Exercice 19

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

2. Démontrer que la fonction  $x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

3. a) Trouver une équation différentielle linéaire  $(E)$  d'ordre 1 dont  $f$  est solution.

b) Résoudre  $(E)$ .

### Exercice 20

On considère la fonction  $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t} dt$

1. Démontrer que  $F$  est définie et continue sur  $]0, +\infty[$ .

2. Démontrer que  $x \mapsto x F(x)$  admet une limite en  $+\infty$  et déterminer la valeur de cette limite.

3. Déterminer un équivalent, au voisinage de  $+\infty$ , de  $F(x)$ .

### Exercice 21

1. Montrer que la série  $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n} (2n+1)}$  converge.

On se propose de calculer la somme de cette série.

2. Donner le développement en série entière en 0 de  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$  en précisant le rayon de convergence.  
(indication : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle)

3. En déduire le développement en série entière en 0 de  $x \mapsto \arcsin(x)$  ainsi que son rayon de convergence.

4. En déduire la valeur de  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n} (2n+1)}$ .