

# Colles

semaine 16 : 08 janvier - 13 janvier

## Questions de cours

### Exercice 1

Inégalité de Cauchy-Schwarz (formule et démonstration).

### Exercice 2

Expression des coordonnées et du produit scalaire en base orthonormale (énoncé et démonstration).

### Exercice 3

Soit  $E$  un espace préhilbertien RÉEL.

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

On suppose que  $F$  est de dimension finie  $m \in \mathbb{N}^*$ .

Démontrer (par analyse-synthèse) :  $E = F \oplus F^\perp$ .

### Exercice 4

Soit  $E$  un espace préhilbertien RÉEL. Soit  $x \in E$ .

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

On suppose que  $F$  est de dimension finie  $m \in \mathbb{N}^*$ .

On note  $p_F$  la projection orthogonale sur  $F$ .

1. Qu'appelle-t-on distance de  $x$  à  $F$ ? (donner la définition, pas la caractérisation).

2. Démontrer :  $\forall x \in E, \forall y \in F, \|x - p_F(x)\| \leq \|x - y\|$ .

3. Démontrer :  $\forall x \in E, d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$ .

## Autres exercices

### Exercice 5

Soit  $E$  un espace préhilbertien RÉEL.

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

On suppose :  $E = F \oplus F^\perp$ .

Démontrer  $(F^\perp)^\perp = F$ .

### Exercice 6

On pose, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} t^n e^{-t^2} dt$ .

Pour tout  $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ , on pose  $\varphi(P, Q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} P(t) Q(t) e^{-t^2} dt$ .

1. Calculer  $A_n$  en distinguant deux cas selon la parité de  $n$ . Donnée :  $A_0 = 1$ .

2. Vérifier que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .

3. Calculer  $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$ .

**Exercice 7**

Soit  $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$ . On pose, pour  $(f, g) \in E \times E$ ,  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) t^2 dt$ .

1. Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire.
2. Calculer  $\int_0^1 t^n \ln(t) dt$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Soit  $F = \{x \mapsto ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  et  $u \in E$  telle que  $u(x) = x \ln(x)$  pour tout  $x \in ]0, 1]$ .  
Déterminer le projeté orthogonal de  $u$  sur  $F$ .
4. Déterminer  $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (at + b - t \ln(t))^2 t^2 dt$ .

**Exercice 8**

On munit l'espace  $E = \mathbb{R}_3[X]$  du produit scalaire défini par  $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x) Q(x) dx$ .

Soit  $F = \{P \in E \mid \langle X^2 - 1, P' \rangle = \langle X, P \rangle\}$  et  $Q = 1 + X + X^2 + X^3$ .

1. Vérifier que l'on définit bien ainsi un produit scalaire sur  $E$ .
2. Vérifier que  $F = \text{Vect}(X)^\perp$ .
3. Déterminer  $d(Q, F)$ .

**Exercice 9**

On munit  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  de sa structure euclidienne canonique.

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par  $a_{i,i} = -1$  et  $a_{i,j} = \frac{1}{n-1}$  si  $i \neq j$ .

1. Vérifier que pour tous  $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $\langle X \mid AY \rangle = \langle AX \mid Y \rangle$ .
2. En déduire que  $\text{Ker}(A)$  et  $\text{Im}(A)$  sont supplémentaires orthogonaux.
3. Déterminer  $\text{Ker}(A)$  et  $\text{Im}(A)$  et retrouver le résultat précédent.

**Exercice 10**

Soit  $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ .

1. Démontrer que l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définie ci-dessous est un produit scalaire :

$$\forall (f, g) \in E \times E, \langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$$

est un produit scalaire sur  $E$ .

2. Soit  $e_0$  la fonction constante égale à 1 sur  $[0, 1]$ . Soit  $F = \text{Vect}(e_0)$ .
  - a) Déterminer  $F^\perp$ .
  - b) Démontrer :  $(F^\perp)^\perp = F$ .

**Exercice 11**

Soit  $E$  un espace euclidien et soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs orthogonaux de  $E$ .

Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\text{Im}(p) \subset \text{Im}(q)$
- (ii)  $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|q(x)\|$

**Exercice 12**

Soit  $E$  un espace euclidien et soit  $p$  un projecteur de  $E$ .

Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i)  $p$  est un projecteur orthogonal

(ii)  $\forall (x, y) \in E \times E, \langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$

(iii)  $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$

(indication : pour démontrer (iii)  $\Rightarrow$  (i), on pourra travailler par l'absurde)

**Exercice 13**

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \geq 2$ , muni d'une base orthonormée  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ .

On cherche à prouver qu'il existe  $(y_1, \dots, y_n) \in E^n$  tel que  $\forall i \neq j, \|y_i\| = \|y_i - y_j\| = 1$ .

On note  $I_n$  la matrice identité de taille  $n$  et  $J_n$  la matrice carrée de taille  $n$  dont tous les coefficients valent 1.

1. Soit  $(y_1, \dots, y_n) \in E^n$ .

On pose  $A = (a_{i,j})$  où  $a_{i,j}$  est la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée de  $y_j$  dans  $\mathcal{B}$ .

a) Exprimer  ${}^tAA$  à l'aide du produit scalaire de  $E$ .

b) En déduire que la famille  $(y_1, \dots, y_n)$  vérifie la propriété voulue si et seulement si :

$${}^tAA = \frac{1}{2} (I_n + J_n)$$

2. On pose  $M = \frac{1}{2}(I_n + J_n)$ .

a) Montrer que les sous-espaces  $\text{Ker} \left( M - \frac{1}{2} I_n \right)$  et  $\text{Ker} \left( M - \frac{n+1}{2} I_n \right)$  sont supplémentaires orthogonaux.

b) En déduire l'existence d'une matrice orthogonale  $P$  telle que  $M = {}^tPDP$ , où :

$$D = \text{Diag} \left( \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{n+1}{2} \right)$$

c) Conclure.

**Énoncés de concours****Exercice 14** (d'après E3A 2024 PSI)

- Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 3.
- On identifie dans tout l'exercice  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{R}^n$ .
- Pour  $p$  et  $q$  deux entiers naturels non nuls et pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ , on note  $A^\top$  la matrice de  $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ , transposée de la matrice  $A$ .
- On rappelle que le produit scalaire canonique de deux vecteurs  $X_1$  et  $X_2$  de  $\mathbb{R}^n$  est :  $\langle X_1 | X_2 \rangle = X_1^\top X_2$  et que  $\|X_1\|^2 = X_1^\top X_1$ .
- Soient  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  deux vecteurs linéairement indépendants de  $\mathbb{R}^n$ .

- On définit la matrice  $M = (m_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, m_{ij} = \delta_{ij} + \alpha x_i x_j + \beta y_i y_j$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux réels et  $\delta_{ij}$  désigne le symbole de Kronecker :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Enfin, on note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est  $M$ .
  1. Justifier que la matrice  $M$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
  2. On note  $U_X = XX^\top$ .
    - a) Justifier que  $U_X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et écrire son terme général.  
Cette matrice est-elle diagonalisable ?
    - b) Déterminer le rang de  $U_X$  puis une base de son image.
    - c) Prouver que  $\text{Ker}(U_X)$  et  $\text{Im}(U_X)$  sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux.
    - d) Prouver que  $\text{Ker}(U_X)$  et  $\text{Im}(U_X)$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.
    - e) Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de la matrice  $U_X$ .
    - f) On note  $u_X$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à la matrice  $U_X$ . Déterminer la matrice de  $u_X$  dans une base adaptée à la décomposition de la question
  3. Dans le cas particulier où  $\alpha \neq 0$  et  $\beta = 0$ , déterminer les valeurs propres de la matrice  $M$ .  
En déduire une matrice diagonale semblable à la matrice  $M$ .
  4. On revient au cas général et on se propose de déterminer les valeurs propres de la matrice  $M = I_n + \alpha U_X + \beta U_Y$ , quelles que soient les valeurs de  $\alpha$  et de  $\beta$ .
    - a) On note  $F = \text{Vect}(X, Y)$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à la matrice  $M$ .
      - (i) Déterminer  $MX$ .
      - (ii) En déduire que  $F$  est stable par  $f$ .
    - b) Justifier que  $F^\perp$  est aussi stable par  $f$  et déterminer l'endomorphisme induit par  $f$  sur  $F^\perp$ .
    - c) On note  $G = \begin{pmatrix} 1 + \alpha\|X\|^2 & \alpha\langle X|Y \rangle \\ \beta\langle X|Y \rangle & 1 + \beta\|Y\|^2 \end{pmatrix}$ .
      - (i) Justifier que  $G$  est la matrice de l'endomorphisme induit sur  $F$  par  $f$  dans la base  $(X, Y)$ .
      - (ii) Écrire la matrice de  $f$  dans une base adaptée à la décomposition  $E = F \oplus F^\perp$ .
      - (iii) Justifier, sans calculer ses valeurs propres, que  $G$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et que ses valeurs propres sont réelles.
      - (iv) Déterminer les valeurs propres de  $G$ .
    - d) Déterminer les valeurs propres de la matrice  $M$ .

### Exercice 15 (d'après E3A 2024 PC)

- Soit  $n$  un entier naturel non nul.
- On note  $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$  l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à  $2n$ . Pour tout  $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$ , on note  $e_k = X^k$  et  $\mathcal{B} = (e_0, \dots, e_{2n})$  la base canonique de  $E$ .
- Pour tout couple de polynômes  $(P, Q)$  de  $E^2$ , on pose  $\langle P|Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$  et on rappelle que l'on définit ainsi un produit scalaire sur  $E$ .
- Soit  $L$  l'application définie sur  $E$  par :  $\forall P \in E, L(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt$ .

1. Montrer que  $L$  est une forme linéaire sur  $E$ .
2. Déterminer  $L(e_k)$  pour tout  $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$ .
3. Déterminer la dimension de  $\text{Ker}(L)$ .
4. Prouver qu'il existe une base  $\mathcal{U}$ , que l'on ne cherchera pas à expliciter, de  $\text{Ker}(L)$ , dont le premier vecteur est  $e_1$ .
5. Montrer :
  - a)  $\text{Vect}(e_0)$  et  $\text{Ker}(L)$  sont deux sous-espaces orthogonaux,
  - b)  $E = \text{Vect}(e_0) \oplus \text{Ker}(L)$ .
6. Soit  $\lambda$  un réel. On considère l'application  $T_\lambda$  définie sur  $E$  par :

$$\forall P \in E, T_\lambda(P) = P + \lambda L(P)X$$

- a) Vérifier que  $T_\lambda$  est un endomorphisme de  $E$ .
- b) Soit  $P \in E$ . Calculer  $(L \circ T_\lambda)(P)$ .
- c) Déterminer la matrice de  $T_\lambda$  dans une base de  $E$  adaptée à la décomposition obtenue aux questions 4 et 5.
- d) Déterminer les valeurs propres de  $T_\lambda$ .
- e) L'endomorphisme  $T_\lambda$  est-il diagonalisable ?
- f) Justifier que  $T_\lambda$  est un automorphisme de  $E$ .
- g) Pour tous réels  $\alpha$  et  $\beta$ , préciser  $T_\alpha \circ T_\beta$ .
- h) Déterminer  $T_\lambda^{-1}$ .

### Exercice 16 (d'après E3A 2024 PC)

1. • Soit  $E = \mathbb{R}[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
  - Soient  $P$  et  $Q$  deux éléments de  $E$ .
  - On note :  $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$  et  $Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k$ , où  $a_p \neq 0$  et  $b_q \neq 0$ .

Prouver que la série  $\sum_{n \geq 0} 2^{-n} P(n) Q(n)$  est absolument convergente.

2. On pose pour tout  $(P, Q) \in E^2$  :  $\langle P | Q \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} P(n) Q(n)$ .

- a) Montrer :  $\langle S | S \rangle = 0 \Leftrightarrow S$  est le polynôme nul.
- b) Démontrer alors que l'on définit ainsi un produit scalaire sur  $E$ .

### 3. Quelques calculs de sommes

- a) Rappeler l'ensemble de définition de la fonction  $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$  et sa somme.
- b) Justifier que la série  $\sum_{n \geq 0} e^{-nx}$  converge pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .
- c) Exprimer  $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$  à l'aide de la fonction  $f$  et en déduire que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- d) Soit  $x > 0$ .  
Exprimer à l'aide des fonctions usuelles,  $g(x)$ ,  $g'(x)$  et  $g''(x)$ .
- e) Soit  $\alpha$  un entier naturel, on pose  $S_\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} n^\alpha 2^{-n}$ .

Calculer  $S_0, S_1$  et  $S_2$ .

On pourra utiliser les questions précédentes avec une valeur de  $x$  bien choisie. On admettra que  $S_3 = 26$  et  $S_4 = 150$ .

4. On cherche à calculer la distance du vecteur  $X^2$  au sous-espace vectoriel  $\mathbb{R}_1[X]$  dans  $E$  muni du produit scalaire défini dans la question 2.
- a) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que  $X^2 - aX - b$  soit orthogonal à 1 et à  $X$ .
- b) Prouver que l'ensemble  $\left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} (n^2 - cn - d)^2 \mid (c, d) \in \mathbb{R}^2 \right\}$  possède un minimum.
- c) En déduire la distance recherchée.

**Exercice 17** (d'après E3A 2023 PC)

- Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2.
- On désigne par  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n$ .
- Le produit scalaire de deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$  est noté  $\langle x \mid y \rangle$  et  $\|x\|$  représente la norme du vecteur  $x$ . Pour tout vecteur  $u$  non nul de  $E$ , on note  $\varphi_u$  l'application de  $E$  dans lui-même définie par :

$$\forall x \in E, \varphi_u(x) = 2 \frac{\langle x \mid u \rangle}{\langle u \mid u \rangle} \cdot u - x$$

**1. Étude de l'application  $\varphi_u$**

- a) Montrer que  $\varphi_u$  est un endomorphisme de  $E$ .
- b) En calculant  $\varphi_u \circ \varphi_u$ , montrer que  $\varphi_u$  est un automorphisme de  $E$  et déterminer  $\varphi_u^{-1}$ .
- c) Soit  $x$  appartenant à  $E$ , calculer  $\langle \varphi_u(x) \mid \varphi_u(x) \rangle$ .
- d) En déduire que  $\varphi_u$  conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle \varphi_u(x) \mid \varphi_u(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$$

- e) On note  $D_u$  la droite vectorielle de base  $u$  et  $H_u = D_u^\perp$ .  
Déterminer l'image de  $D_u$  par  $\varphi_u$ .  
En déduire sans calcul que  $H_u$  est stable par  $\varphi_u$ .  
Reconnaître alors la nature géométrique de l'endomorphisme  $\varphi_u$  et en donner les éléments caractéristiques.

**2. Étude d'un exemple dans le cas  $n = 3$**

Soit  $H$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  muni de sa structure euclidienne canonique et constitué des vecteurs  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  tels que  $x + y + z = 0$ .

- a) Donner la dimension et une base orthonormale de  $H^\perp$ .
- b) Écrire la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  de la projection orthogonale sur  $H^\perp$  puis celle de la projection orthogonale sur  $H$ .
- c) Soit  $v$  un vecteur unitaire de  $H^\perp$ .  
Écrire la matrice de  $\varphi_v$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

**3. Étude d'une réciproque**

Soit  $\psi$  un endomorphisme de  $E$  tel qu'il existe une droite vectorielle  $\Delta$  de  $E$  vérifiant :  $\forall x \in \Delta, \psi(x) = x$  et  $\forall x \in \Delta^\perp, \psi(x) = -x$ .

- a) Montrer que  $\psi \circ \psi = \text{id}_E$  et que  $\psi$  conserve le produit scalaire.
- b) Montrer qu'il existe au moins un vecteur  $u$  de  $E$  tel que  $\psi = \varphi_u$ .

**Exercice 18** (*d'après E3A 2020 PC*)

Dans cet exercice,  $E$  désigne l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_2[X]$  des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels et  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$  sa base canonique.

Pour tout couple  $(P, Q)$  d'éléments de  $E$ , on pose :

$$\langle P, Q \rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1).$$

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur  $E$ .
2. Déterminer une base orthonormale de  $E$  pour ce produit scalaire.
3. Déterminer la distance du polynôme  $U = X^2 - 4$  à  $\mathbb{R}_1[X]$ .
4. Soit  $H$  l'ensemble des polynômes  $P$  de  $E$  tels que  $P(1) = 0$ .
  - a) Vérifier que  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Quelle est sa dimension ?
  - b) Soit  $\varphi$  la projection orthogonale sur  $H$ . Déterminer la matrice de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Exercice 19** (*d'après E3A 2021 PC*)

- Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E = \mathbb{R}_n[X]$ .
- On note  $(P_0(X) = 1, P_1(X) = X, \dots, P_n(X) = X^n)$  la base canonique de  $E$ . Soit  $(a_j)_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  une famille de réels distincts deux à deux.
- Pour tout couple  $(P, Q)$  d'éléments de  $E$ , on pose :  $\langle P | Q \rangle = \sum_{j=0}^n P(a_j) Q(a_j)$ .

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur  $E$ .
2. Soit  $P$  un polynôme de  $E$ , calculer  $\langle P | P_0 \rangle$ .
3. Pour tout  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on considère le polynôme :

$$L_j(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{X - a_k}{a_j - a_k}$$

- a) Démontrer que, pour tout couple  $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ ,  $L_j(a_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .
  - b) Prouver que la famille  $\mathcal{B} = (L_j)_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  est une famille orthogonale pour le produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ .
  - c) En déduire que  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  et qu'elle est orthonormale.
  - d) Déterminer les composantes d'un polynôme  $P$  de  $E$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
  - e) Déterminer  $\sum_{j=0}^n L_j$ .
4. Soit  $H$  l'ensemble des polynômes  $P$  de  $E$  tels que  $\sum_{j=0}^n P(a_j) = 0$ .
    - a) Montrer que  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
    - b) Déterminer  $H^\perp$  et en déduire la dimension de  $H$ .
  5. Soit  $Q$  un polynôme de  $E$ .
    - a) Déterminer le projeté orthogonal de  $Q$  sur  $H^\perp$ .
    - b) Déterminer la distance de  $Q$  au sous-espace vectoriel  $H$ .

**Exercice 20** (d'après E3A 2020 MP)

Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, on note  $E = \mathbb{R}_n[X]$  et on pose, pour tout couple  $(P, Q) \in E^2$  :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$$

1. Démontrer que l'on définit ainsi sur  $E$  un produit scalaire.  
Dans la suite de cet exercice,  $E$  est l'espace euclidien  $\mathbb{R}_n[X]$  muni de ce produit scalaire.
2. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $p$ .  
Donner sans démonstration la dimension de  $F^\perp$ .
3. On prend dans cette question  $n = 2$   
Déterminer une base du sous-espace  $(\mathbb{R}_1[X])^\perp$ .
4. On revient au cas général :  $n \geq 2$  et soit  $L \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$  non nul.
  - a) Déterminer le degré de  $L$ .
  - b) On pose, lorsque cela est possible, pour  $x$  réel :  $\varphi(x) = \int_0^1 L(t)t^x dt$ .
    - (i) Montrer que  $\varphi$  est une fonction rationnelle.
    - (ii) Déterminer les zéros et les pôles de  $\varphi$ . Donner pour chacun l'ordre de multiplicité.  
On pourra examiner les degrés du dénominateur et du numérateur de la fonction rationnelle  $\varphi$ .
    - (iii) En déduire une expression de  $\varphi$ , à une constante multiplicative près, faisant apparaître le numérateur et le dénominateur sous forme factorisée.
  - c) En utilisant une décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle  $\varphi$ , donner une base de  $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$ .

**Exercice 21** (d'après E3A 2020 PSI)

Soient  $E$  un plan vectoriel,  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$  une base de  $E$  et  $\theta \in ]0, \pi[$  fixé.

On considère l'endomorphisme  $f$  de  $E$  représenté par sa matrice  $C$  dans la base  $\mathcal{B}$  :  $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}$ .

On définit alors sur  $E$  une forme bilinéaire symétrique  $\Phi$  par les relations :

$$\Phi(\vec{i}, \vec{j}) = \Phi(\vec{j}, \vec{i}) = \cos(\theta) \text{ et } \Phi(\vec{i}, \vec{i}) = \Phi(\vec{j}, \vec{j}) = 1.$$

On rappelle qu'une forme bilinéaire sur  $E$  est une application de  $E^2$  dans  $\mathbb{R}$ , linéaire par rapport à chacune des variables.

1. Soient  $X = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$  et  $Y = y_1\vec{i} + y_2\vec{j}$  deux vecteurs de  $E$ .  
Exprimer  $\Phi(X, Y)$  en fonction des réels  $x_1, x_2, y_1, y_2$  et  $\theta$ .
2. Montrer que  $\Phi$  est un produit scalaire sur  $E$ .
3. Prouver que  $f$  est une isométrie pour le produit scalaire  $\Phi$ .
4. Déterminer un vecteur  $\vec{k} \in E$  tel que  $(\vec{i}, \vec{k})$  soit une base orthonormée pour  $\Phi$  et que  $\Phi(\vec{j}, \vec{k}) > 0$ .
5. Expliciter la matrice de  $f$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{k})$ . Préciser la nature de  $f$ .
6. Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . Pour quelles valeurs de  $\theta \in ]0, \pi[$  a-t-on  $f^m = \text{id}_E$  ?