Colles

semaine 17 : 15 janvier - 20 janvier

Questions de cours

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t(1-itx)}\ dt$.

1. Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\Gamma_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^p \mathrm{e}^{-t}\ dt$.

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de Γ_p et déterminer une relation entre Γ_{p+1} et Γ_p.

Exercice 2

Pour $x > 0$, on note : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{e}^{-tx}\ dt$, $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \sin(t)\ dt$ et $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \cos(t)\ dt$.

1. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ |\sin(t)| \leqslant t$.

2. Montrer que les fonctions F, G et H sont bien définies sur $]0, +\infty[$.

3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

4. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer F' à l'aide de G.

Exercice 3

Pour tout $(P, Q) \in \big(\mathbb{R}[X]\big)^2$, on pose $\varphi(P, Q) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} P(t)\ Q(t)\ \mathrm{e}^{-t^2}\ dt$.

Démontrer que φ est un produit scalaire.

Exercices

Exercice 4

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} t^n\ \mathrm{e}^{-t^2}\ dt$.

Pour tout $(P, Q) \in \big(\mathbb{R}[X]\big)^2$, on pose $\varphi(P, Q) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} P(t)\ Q(t)\ \mathrm{e}^{-t^2}\ dt$.

1. Calculer A_n en distinguant deux cas selon la parité de n. Donnée : $A_0 = 1$.

2. Vérifier que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

3. Calculer $\mathrm{d}\big(X^3, \mathbb{R}_2[X]\big)$.

Exercice 5

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$. On pose, pour $(f, g) \in E \times E$, $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)\ g(t)\ t^2\ dt$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 t^n\ \ln(t)\ dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Soit $F = \{x \mapsto ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ et $u \in E$ telle que $u(x) = x \ln(x)$ pour tout $x \in]0, 1]$.
Déterminer le projeté orthogonal de u sur F.

4. Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_a^1 \big(a\,t + b - t\ln(t)\big)^2\ t^2\ dt$.

Exercice 6

On munit l'espace $E = \mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire défini par $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)\ Q(x)\ dx$.

Soit $F = \{P \in E \mid \langle X^2 - 1, P'\rangle = \langle X, P\rangle\}$ et $Q = 1 + X + X^2 + X^3$.

1. Vérifier que l'on définit bien ainsi un produit scalaire sur E.

2. Vérifier que $F = \mathrm{Vect}\,(X)^{\perp}$.

3. Déterminer $d(Q, F)$.

Exercice 7

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,i} = -1$ et $a_{i,j} = \dfrac{1}{n-1}$ si $i \neq j$.

1. Vérifier que pour tous $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle X \mid AY\rangle = \langle AX \mid Y\rangle$.

2. En déduire que $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont supplémentaires orthogonaux.

3. Déterminer $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ et retrouver le résultat précédent.

Exercice 8

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, muni d'une base orthonormée $B = (e_1, \ldots, e_n)$.

On cherche à prouver qu'il existe $(y_1, \ldots, y_n) \in E^n$ tel que $\forall i \neq j$, $\|y_i\| = \|y_i - y_j\| = 1$.

On note I_n la matrice identité de taille n et J_n la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients valent 1.

1. Soit $(y_1, \ldots, y_n) \in E^n$.

On pose $A = (a_{i,j})$ où $a_{i,j}$ est la i-ème coordonnée de y_j dans B.

a) Exprimer ${}^tAA$ à l'aide du produit scalaire de E.

b) En déduire que la famille $(y_1, \ldots, y_n)$ vérifie la propriété voulue si et seulement si :

$$ {}^tAA = \frac{1}{2}\ (I_n + J_n) $$

2. On pose $M = \dfrac{1}{2}(I_n + J_n)$.

a) Montrer que les sous-espaces $\mathrm{Ker}(M - \frac{1}{2}I_n)$ et $\mathrm{Ker}(M - \frac{n+1}{2}I_n)$ sont supplémentaires orthogonaux.

b) En déduire l'existence d'une matrice orthogonale P telle que $M = {}^tPDP$, où :

$$ D = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) $$

c) Conclure.

Théorème de convergence dominée

Exercice 9

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n\,\mathrm{e}^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n\,\mathrm{e}^{-t}}\,dt$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 10

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt$.

1. Justifier que I_n est bien définie.

2. ***a)*** Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n\, I_n$ est-elle convergente ?

Exercice 11

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+n^2\,x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.

2. Soit $a \in \,]0,1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$?

3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Théorème d'intégration terme à terme

Exercice 12

1. Soient a et b deux réels donnés avec $a < b$.
Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.

3. Démontrer : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,2^n}$.

Exercice 13

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto t^n\,\ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\,\ln(t)\,dt$

2. Démontrer que $f : t \mapsto \mathrm{e}^t\,\ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et : $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t\,\ln(t)\,dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,n!}$.

Exercice 14

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |\, a_n \,|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : t \mapsto \dfrac{a_n\, t^n}{n!}\ \mathrm{e}^{-t}$.

1. a) Jusitfier que la suite (a_n) est bornée.

b) Jusitifer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

On admet, dans la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

2. a) Jusitfier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n\ \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\ dt$.

En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\, f_n(t) \,|\ dt$.

b) Démontrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n\, t^n}{n!}\ \mathrm{e}^{-t} \right) dt \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 15

On souhaite justifier l'existence et déterrminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(\sqrt{x})}\ dx$.

1. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}(\sqrt{x})}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

2. Démontrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(\sqrt{x})}\ dx \ = \ \int_1^0 \frac{2}{t - \frac{1}{t}}\ \frac{2\ \ln(t)}{t}\ dt$.

3. a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 |\, -t^{2n}\ \ln(t) \,|\ dt$.

b) Démontrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ dx \ = \ \frac{\pi^2}{2}$.

(on pourra utiliser : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \ = \ \frac{\pi^2}{6}$*)*

Exercice 16

1. Démontrer : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t}\ dt \ = \ -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\ dt$.

2. En déduire : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t}\ dt \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

Exercice 17

Pour $x > 1$, on note : $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

Montrer :

$$\int_2^{+\infty} \big(\zeta(x) - 1\big)\ dx \ = \ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2\ \ln(n)}$$

Intégrales à paramètres

Exercice 18
On note, pour tout $x \in]0,+\infty[$, pour tout $t \in [0,+\infty[$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}$.

1. Démontrer : $\forall x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On pose alors : $\forall x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, dt$.

2. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.

3. Démontrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Exercice 19

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

2. Démontrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(xt)\, dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. ***a)*** Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.

b) Résoudre (E).

Exercice 20
On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\, dt$

1. Démontrer que F est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

2. Démontrer que $x \mapsto x\, F(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.

3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

Exercice 21

1. Montrer que la série $\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2\, 2^{4n}\, (2n+1)}$ converge.

On se propose de calculer la somme de cette série.

2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.
(indication : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle)

3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \arcsin(x)$ ainsi que son rayon de convergence.

4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2\, 2^{4n}\, (2n+1)}$.