Colles

semaine 17 : 15 janvier - 20 janvier

Questions de cours

Exercice 1
Inégalité de Cauchy-Schwarz (formule et démonstration).

Exercice 2
Expression des coordonnées et du produit scalaire en base orthonormale (énoncé et démonstration).

Exercice 3

Soit E un espace préhilbertien RÉEL.

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

On suppose que F est de dimension finie $m \in \mathbb{N}^*$.

Démontrer (par analyse-synthèse) : $E = F \oplus F^\perp$.

Exercice 4

Soit E un espace préhilbertien RÉEL. Soit $x \in E$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

On suppose que F est de dimension finie $m \in \mathbb{N}^*$.

On note p_F la projection orthogonale sur F.

1. Qu'appelle-t-on distance de x à F ? (donner la définition, pas la caractérisation).

2. Démontrer : $\forall\, x \in E, \forall\, y \in F,\ \|x - p_F(x)\| \leqslant \|x - y\|$.

3. Démontrer : $\forall x \in E,\ \mathrm{d}(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.

Autres exercices

Exercice 5

Soit E un espace préhilbertien RÉEL.

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

On suppose : $E = F \oplus F^\perp$.

Démontrer $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

Exercice 6

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} t^n \ \mathrm{e}^{-t^2}\ dt$.

Pour tout $(P, Q) \in \left(\mathbb{R}[X]\right)^2$, on pose $\varphi(P, Q) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} P(t)\ Q(t)\ \mathrm{e}^{-t^2}\ dt$.

1. Calculer A_n en distinguant deux cas selon la parité de n. Donnée : $A_0 = 1$.

2. Vérifier que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

3. Calculer $\mathrm{d}\left(X^3, \mathbb{R}_2[X]\right)$.

Exercice 7

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1])$. On pose, pour $(f,g) \in E \times E$, $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)\ g(t)\ t^2\ dt$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 t^n\ \ln(t)\ dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Soit $F = \{x \mapsto ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ et $u \in E$ telle que $u(x) = x\ln(x)$ pour tout $x \in \,]0,1]$.
Déterminer le projeté orthogonal de u sur F.

4. Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \big(a\,t + b - t\ln(t)\big)^2\ t^2\ dt$.

Exercice 8

On munit l'espace $E = \mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire défini par $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 P(x)\ Q(x)\ dx$.

Soit $F = \{P \in E \mid \langle X^2 - 1, P' \rangle = \langle X, P \rangle\}$ et $Q = 1 + X + X^2 + X^3$.

1. Vérifier que l'on définit bien ainsi un produit scalaire sur E.

2. Vérifier que $F = \operatorname{Vect}(X)^{\perp}$.

3. Déterminer $\mathrm{d}(Q, F)$.

Exercice 9

On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,i} = -1$ et $a_{i,j} = \dfrac{1}{n-1}$ si $i \neq j$.

1. Vérifier que pour tous $(X, Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle X \mid AY \rangle = \langle AX \mid Y \rangle$.

2. En déduire que $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont supplémentaires orthogonaux.

3. Déterminer $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ et retrouver le résultat précédent.

Exercice 10

Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$.

1. Démontrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie ci-dessous est un produit scalaire :

$$\forall (f,g) \in E \times E, \langle f, g \rangle = f(0)\, g(0) + \int_0^1 f'(t)\, g'(t)\ dt$$

est un produit sclaire sur E.

2. Soit e_0 la fonction constante égale à 1 sur $[0,1]$. Soit $F = \operatorname{Vect}(e_0)$.

a) Déterminer $F^{\perp}$.

b) Démontrer : $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

Exercice 11

Soit E un espace euclidien et soient p et q deux projecteurs orthogonaux de E.

Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(q)$

(ii) $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|q(x)\|$

Exercice 12

Soit E un espace euclidien et soit p un projecteur de E.

Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) p est un projecteur orthogonal

(ii) $\forall (x,y) \in E \times E$, $\langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$

(iii) $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$

(indication : pour démontrer $(iii) \Rightarrow (i)$, on pourra travailler par l'absurde)

Exercice 13

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, muni d'une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

On cherche à prouver qu'il existe $(y_1, \ldots, y_n) \in E^n$ tel que $\forall i \neq j$, $\|y_i\| = \|y_i - y_j\| = 1$.

On note I_n la matrice identité de taille n et J_n la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients valent 1.

1. Soit $(y_1, \ldots, y_n) \in E^n$.

On pose $A = (a_{i,j})$ où $a_{i,j}$ est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de y_j dans $\mathscr{B}$.

a) Exprimer ${}^tAA$ à l'aide du produit scalaire de E.

b) En déduire que la famille $(y_1, \ldots, y_n)$ vérifie la propriété voulue si et seulement si :

$$ {}^tAA = \frac{1}{2}\,(I_n + J_n) $$

2. On pose $M = \dfrac{1}{2}(I_n + J_n)$.

a) Montrer que les sous-espaces $\operatorname{Ker}\left(M - \dfrac{1}{2}\,I_n\right)$ et $\operatorname{Ker}\left(M - \dfrac{n+1}{2}\,I_n\right)$ sont supplémentaires orthogonaux.

b) En déduire l'existence d'une matrice orthogonale P telle que $M = {}^tPDP$, où :

$$ D = \operatorname{Diag}\left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) $$

c) Conclure.

Énoncés de concours

Exercice 14 *(d'après* `E3A 2024 PSI`*)*

- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
- On identifie dans tout l'exercice $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$.
- Pour p et q deux entiers naturels non nuls et pour toute matrice A de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on note $A^\top$ la matrice de $\mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{R})$, transposée de la matrice A.
- On rappelle que le produit scalaire canonique de deux vecteurs X_1 et X_2 de $\mathbb{R}^n$ est : $\langle X_1 \,|\, X_2\rangle = X_1^\top X_2$ et que $\|X_1\|^2 = X_1^\top X_1$.
- Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$.

- On définit la matrice $M = (m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{ij} = \delta_{ij} + \alpha\, x_i x_j + \beta\, y_i y_j$$

où α et β sont deux réels et δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ j = i \\ 0 & sinon \end{cases}$$

- Enfin, on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est M.

1. Justifier que la matrice M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. On note $U_X = XX^\top$.

a) Justifier que $U_X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et écrire son terme général.
Cette matrice est-elle diagonalisable ?

b) Déterminer le rang de U_X puis une base de son image.

c) Prouver que $\mathrm{Ker}\,(U_X)$ et $\mathrm{Im}\,(U_X)$ sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux.

d) Prouver que $\mathrm{Ker}\,(U_X)$ et $\mathrm{Im}\,(U_X)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

e) Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de la matrice U_X.

f) On note u_X l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice U_X. Déterminer la matrice de u_X dans une base adaptée à la décomposition de la question

3. Dans le cas particulier où $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$, déterminer les valeurs propres de la matrice M.
En déduire une matrice diagonale semblable à la matrice M.

4. On revient au cas général et on se propose de déterminer les valeurs propres de la matrice $M = I_n + \alpha U_X + \beta U_Y$, quelles que soient les valeurs de α et de β.

a) On note $F = \mathrm{Vect}\,(X,Y)$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice M.

(i) Déterminer MX.

(ii) En déduire que F est stable par f.

b) Justifier que $F^\perp$ est aussi stable par f et déterminer l'endomorphisme induit par f sur $F^\perp$.

c) On note $G = \begin{pmatrix} 1+\alpha\|X\|^2 & \alpha\,\langle X \,|\, Y\rangle \\ \beta\,\langle X \,|\, Y\rangle & 1+\beta\|Y\|^2 \end{pmatrix}$.

(i) Justifier que G est la matrice de l'endomorphisme induit sur F par f dans la base (X,Y).

(ii) Écrire la matrice de f dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$.

(iii) Justifier, sans calculer ses valeurs propres, que G est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et que ses valeurs propres sont réelles.

(iv) Déterminer les valeurs propres de G.

d) Déterminer les valeurs propres de la matrice M.

Exercice 15 *(d'après* `E3A 2024 PC`*)*

- Soit n un entier naturel non nul.
- On note $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à $2n$. Pour tout $k \in [\![0,2n]\!]$, on note $e_k = X^k$ et $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_{2n})$ la base canonique de E.
- Pour tout couple de polynômes (P,Q) de E^2, on pose $\langle P \,|\, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$ et on rappelle que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
- Soit L l'application définie sur E par : $\forall P \in E, L(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,dt$.

1. Montrer que L est une forme linéaire sur E.

2. Déterminer $L\left(e_k\right)$ pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$.

3. Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(L)$.

4. Prouver qu'il existe une base $\mathscr{U}$, que l'on ne cherchera pas à expliciter, de $\mathrm{Ker}(L)$, dont le premier vecteur est e_1.

5. Montrer :

a) $\mathrm{Vect}\left(e_0\right)$ et $\mathrm{Ker}(L)$ sont deux sous-espaces orthogonaux,

b) $E = \mathrm{Vect}\left(e_0\right) \oplus \mathrm{Ker}(L)$.

6. Soit λ un réel. On considère l'application T_λ définie sur E par :

$$\forall P \in E, T_\lambda(P) = P + \lambda L(P) X$$

a) Vérifier que T_λ est un endomorphisme de E.

b) Soit $P \in E$. Calculer $\left(L \circ T_\lambda\right)(P)$.

c) Déterminer la matrice de T_λ dans une base de E adaptée à la décomposition obtenue aux questions ***4*** et ***5***.

d) Déterminer les valeurs propres de T_λ.

e) L'endomorphisme T_λ est-il diagonalisable ?

f) Justifier que T_λ est un automorphisme de E.

g) Pour tous réels α et β, préciser $T_\alpha \circ T_\beta$.

h) Déterminer T_λ^{-1}.

Exercice 16 *(d'après* `E3A 2024 PC`*)*

1.
- Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
- Soient P et Q deux éléments de E.
- On note : $P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum\limits_{k=0}^{q} b_k X^k$, où $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.

Prouver que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} 2^{-n} P(n)\, Q(n)$ est absolument convergente.

2. On pose pour tout $(P, Q) \in E^2$: $\langle P \mid Q \rangle = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}\ P(n)\, Q(n)$.

a) Montrer : $\langle S \mid S \rangle = 0 \Leftrightarrow S$ est le polynôme nul.

b) Démontrer alors que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

3. **Quelques calculs de sommes**

a) Rappeler l'ensemble de définition de la fonction $f : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n$ et sa somme.

b) Justifier que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \mathrm{e}^{-nx}$ converge pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

c) Exprimer $g : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}$ à l'aide de la fonction f et en déduire que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Soit $x > 0$.
Exprimer à l'aide des fonctions usuelles, $g(x)$, $g'(x)$ et $g''(x)$.

e) Soit α un entier naturel, on pose $S_\alpha = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^\alpha 2^{-n}$.

Calculer S_0, S_1 et S_2.

On pourra utiliser les questions précédentes avec une valeur de x bien choisie. On admettra que $S_3 = 26$ et $S_4 = 150$.

4. On cherche à calculer la distance du vecteur X^2 au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$ dans E muni du produit scalaire défini dans la question *2*.

a) Déterminer les réels a et b tels que $X^2 - aX - b$ soit orthogonal à 1 et à X.

b) Prouver que l'ensemble $\left\{\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \ \left(n^2 - c\,n - d\right)^2 \ \mid (c,d) \in \mathbb{R}^2\right\}$ possède un minimum.

c) En déduire la distance recherchée.

Exercice 17 *(d'après* `E3A 2023 PC`*)*

- Soit n un entier supérieur ou égal à 2 .
- On désigne par E un espace vectoriel euclidien de dimension n.
- Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est noté $\langle x \mid y\rangle$ et $\|x\|$ représente la norme du vecteur x. Pour tout vecteur u non nul de E, on note φ_u l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall x \in E, \varphi_u(x) = 2\ \frac{\langle x \mid u\rangle}{\langle u \mid u\rangle} \cdot u - x$$

1. **Étude de l'application φ_u**

a) Montrer que φ_u est un endomorphisme de E.

b) En calculant $\varphi_u \circ \varphi_u$, montrer que φ_u est un automorphisme de E et déterminer φ_u^{-1}.

c) Soit x appartenant à E, calculer $\langle \varphi_u(x) \mid \varphi_u(x)\rangle$.

d) En déduire que φ_u conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\forall (x,y) \in E^2, \langle \varphi_u(x) \mid \varphi_u(y)\rangle = \langle x \mid y\rangle$$

e) On note D_u la droite vectorielle de base u et $H_u = D_u^{\perp}$.
Déterminer l'image de D_u par φ_u.
En déduire sans calcul que H_u est stable par φ_u.
Reconnaître alors la nature géométrique de l'endomorphisme φ_u et en donner les éléments caractéristiques.

2. **Étude d'un exemple dans le cas $n = 3$**

Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et constitué des vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $x + y + z = 0$.

a) Donner la dimension et une base orthonormale de $H^{\perp}$.

b) Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur $H^{\perp}$ puis celle de la projection orthogonale sur H.

c) Soit v un vecteur unitaire de $H^{\perp}$.
Écrire la matrice de φ_v dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. **Étude d'une réciproque**

Soit ψ un endomorphisme de E tel qu'il existe une droite vectorielle Δ de E vérifiant : $\forall x \in \Delta, \psi(x) = x$ et $\forall x \in \Delta^{\perp}, \psi(x) = -x$.

a) Montrer que $\psi \circ \psi = \mathrm{id}_E$ et que ψ conserve le produit scalaire.

b) Montrer qu'il existe au moins un vecteur u de E tel que $\psi = \varphi_u$.

Exercice 18 *(d'après* `E3A 2020 PC`*)*

Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels et $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique.

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1).$$

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

2. Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.

3. Déterminer la distance du polynôme $U = X^2 - 4$ à $\mathbb{R}_1[X]$.

4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $P(1) = 0$.

a) Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E. Quelle est sa dimension ?

b) Soit φ la projection orthogonale sur H. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 19 *(d'après* `E3A 2021 PC`*)*

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.
- On note $(P_0(X) = 1, P_1(X) = X, \ldots, P_n(X) = X^n)$ la base canonique de E. Soit $(a_j)_{j\in[\![0,n]\!]}$ une famille de réels distincts deux à deux.
- Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E, on pose : $\langle P \mid Q\rangle = \sum\limits_{j=0}^{n} P(a_j)\, Q(a_j)$.

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

2. Soit P un polynôme de E, calculer $\langle P \mid P_0\rangle$.

3. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on considère le polynôme :

$$L_j(X) = \prod_{\substack{k=0\\ k\neq j}}^{n} \frac{X - a_k}{a_j - a_k}$$

a) Démontrer que, pour tout couple $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2, L_j(a_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

b) Prouver que la famille $\mathscr{B} = (L_j)_{j\in[\![0,n]\!]}$ est une famille orthogonale pour le produit scalaire $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$.

c) En déduire que $\mathscr{B}$ est une base de E et qu'elle est orthonormale.

d) Déterminer les composantes d'un polynôme P de E dans la base $\mathscr{B}$.

e) Déterminer $\sum\limits_{j=0}^{n} L_j$.

4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $\sum\limits_{j=0}^{n} P(a_j) = 0$.

a) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E.

b) Déterminer $H^\perp$ et en déduire la dimension de H.

5. Soit Q un polynôme de E.

a) Déterminer le projeté orthogonal de Q sur $H^\perp$.

b) Déterminer la distance de Q au sous-espace vectoriel H.

Exercice 20 *(d'après* `E3A 2020 MP`*)*

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on pose, pour tout couple $(P, Q) \in E^2$:

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\ dt$$

1. Démontrer que l'on définit ainsi sur E un produit scalaire.
Dans la suite de cet exercice, E est l'espace euclidien $\mathbb{R}_n[X]$ muni de ce produit scalaire.

2. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p.
Donner sans démonstration la dimension de $F^\perp$.

3. On prend dans cette question $n = 2$
Déterminer une base du sous-espace $(\mathbb{R}_1[X])^\perp$.

4. On revient au cas général : $n \geqslant 2$ et soit $L \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$ non nul.

a) Déterminer le degré de L.

b) On pose, lorsque cela est possible, pour x réel : $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 L(t)t^x\ dt$.

(i) Montrer que φ est une fonction rationnelle.

(ii) Déterminer les zéros et les pôles de φ. Donner pour chacun l'ordre de multiplicité.
On pourra examiner les degrés du dénominateur et du numérateur de la fonction rationnelle φ.

(iii) En déduire une expression de φ, à une constante multiplicative près, faisant apparaître le numérateur et le dénominateur sous forme factorisée.

c) En utilisant une décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle φ, donner une base de $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$.

Exercice 21 *(d'après* `E3A 2020 PSI`*)*

Soient E un plan vectoriel, $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E et $\theta \in]0, \pi[$ fixé.

On considère l'endomorphisme f de E représenté par sa matrice C dans la base $\mathscr{B}$: $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

On définit alors sur E une forme bilinéaire symétrique Φ par les relations :

$$\Phi(\vec{i}, \vec{j}) = \Phi(\vec{j}, \vec{i}) = \cos(\theta) \text{ et } \Phi(\vec{i}, \vec{i}) = \Phi(\vec{j}, \vec{j}) = 1.$$

On rappelle qu'une forme bilinéaire sur E est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$, linéaire par rapport à chacune des variables.

1. Soient $X = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$ et $Y = y_1\vec{i} + y_2\vec{j}$ deux vecteurs de E.
Exprimer $\Phi(X, Y)$ en fonction des réels x_1, x_2, y_1, y_2 et θ.

2. Montrer que Φ est un produit scalaire sur E.

3. Prouver que f est une isométrie pour le produit scalaire Φ.

4. Déterminer un vecteur $\vec{k} \in E$ tel que $(\vec{i}, \vec{k})$ soit une base orthonormée pour Φ et que $\Phi(\vec{j}, \vec{k}) > 0$.

5. Expliciter la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{k})$. Préciser la nature de f.

6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour quelles valeurs de $\theta \in]0, \pi[$ a-t-on $f^m = \mathrm{id}_E$?