Colles

semaine 18 : 22 janvier - 27 janvier

Exercice 1
Étudier le domaine de convergence des séries entières suivantes.

1) $\sum z^n$ *2)* $\sum n\, z^n$ *3)* $\sum 2^n\, z^n$ *4)* $\sum \dfrac{z^n}{3^n}$ *5)* $\sum \dfrac{z^n}{n}$

6) $\sum \dfrac{z^n}{\ln(n)}$ *7)* $\sum \dfrac{z^n}{n^n}$ *8)* $\sum \big(\ln(n)\big)\, z^n$ *9)* $\sum n!\, z^n$ *10)* $\sum \big(\sin(n)\big)\, z^n$

Exercice 2

1. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série $\sum \dfrac{n^3}{n!}\, z^n$

2. Déterminer, grâce à la formule de Stirling, le rayon de convergence de la série $\sum \dfrac{n^n}{n!}\, z^n$.

Exercice 3
Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivante, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n\, x^{2n}}{n}$.

2. $\sum a_n\, x^n$ avec : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$

Exercice 4

1. Déterminer un exemple où la série $\sum (a_n + b_n)\, z^n$ a un rayon de convergence strictement plus grand que $\min(R_a, R_b)$.

2. Déterminer les rayons de convergence des séries $f : z \mapsto 1 - z$, $g : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, et $f \times g$.

3. Montrer que $\sum (n+1)\, z^n$ est un produit de séries entières de rayon de convergence égal à 1 et que son rayon de convergence est égal à 1.

4. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série $\sum H_n\, x^n$ où : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 5
Soit la suite (a_n) définie par $a_0 = -4$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ et $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant 2^{n+2}$.

2. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ est non nul.

3. On pose $\rho = \min\{1, R\}$ et, lorsque c'est possible, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

  a) Montrer que pour tout $x \in]-\rho, \rho[$, $S(x) = \dfrac{-4 + 6x + 6x^2}{(x+1)(x-1)^2}$.

  b) Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\dfrac{-4 + 6x + 6x^2}{(x+1)(x-1)^2} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{(x-1)^2} + \dfrac{c}{x-1}$.

4. Calculer a_n en fonction de n.

Exercice 6

Soit X un ensemble fini. On dit que $f : X \to X$ est une involution de X si $f \circ f = \mathrm{id}$.

On note pour $n \in \mathbb{N}$, I_n le nombre d'involutions de $]\!]1, n[\![$ et l'on convient que $I_0 = 1$.

Soit $S : z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{I_n}{n!} z^n$.

1. Calculer I_1, I_2, I_3.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)\, I_n$.

3. Montrer que S a un rayon de convergence $R > 0$.

4. Soit $x \in \,]-R, R[$.
Calculer $(1+x)\ S(x)$ et en déduire une expression simple de $S(x)$.
En déduire une expression de I_n.

Exercice 7

Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+2} = a_{n+1} + \dfrac{a_n}{n+2}$.

1. Démontrer que la série $\sum\ (a_{n+2} - a_{n+1})$ est divergente. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\ a_n x^n$.

3. On note $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-1, 1[$.

a) Vérifier que f est solution sur $]-1, 1[$ de l'équation différentielle $(x-1)y' + (x+1)y = 0$.

b) En déduire une expression simplifiée de f.

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}\ (n-k+1)$ puis en déduire un équivalent de a_n.

Exercice 8

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \mathrm{Card}\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p + 2q = n\}$ qui représente, par exemple, le nombre de façons de payer n euros (quand $n \neq 0$) avec des pièces de 1 et 2.

1. Calculer a_0, a_1, a_2 et a_3.

2. Justifier que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer son développement en série entière.

3. En déduire deux expressions de a_n en fonction de n.

Exercice 9

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre de parenthésage possibles d'un produit de n éléments de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. Par convention, on note : $a_1 = 1$. Par ailleurs :

× $a_2 = 1$,

× $a_3 = 2$,

× $a_4 = 5$.

Montrer que, pour tout $n \in [\![2, +\infty]\!]$, $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k\, a_{n-k}$.

2. On étudie maintenant la série entière $\sum\ a_n\, x^n$.
Supposons que le rayon de convergence R de cette série est strictement positif.
On note f la somme de cette série.
Démontrer : $\forall x \in \,]-R, R[,\ \big(f(x)\big)^2 - f(x) + x = 0$.

3. On ne suppose plus $R > 0$. Calculer R et la somme f de la série entière $\sum\ a_n\, x^n$.

4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de a_n.

Exercice 10

Soit (u_n) une suite telle que, pour tout $n \geqslant 3$, $u_n = 6u_{n-1} - 11u_{n-2} + 6u_{n-3}$.

1. Montrer qu'il existe $c \geqslant 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant c\, 8^n$.

2. Trouver le rayon de convergence de $\sum\ u_n x^n$.

3. Déterminer la somme de cette série entière.

Exercice 11

Solutions développables en séries entières des équations différentielles suivantes ?

a) $(x^2 - x)y'' + (x+1)y' - y = 0$ ***b)*** $(x^2+1)y'' + 4xy' + 2y = 0$ ***c)*** $4xy'' - 2y' + 9x^2 y = 0$

Exercice 12

1. Montrer que la série $\sum\ \dfrac{(2n)!}{(n!)^2\ 2^{4n}\ (2n+1)}$ converge.

On se propose de calculer la somme de cette série.

2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.

Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.

3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \arcsin(x)$ ainsi que son rayon de convergence.

4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2\ 2^{4n}\ (2n+1)}$.

Exercice 13

1. Expliciter les développements en série entière des fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}} \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \frac{1}{(1-x)^{3/2}}$$

2. À l'aide d'un produit de Cauchy, démontrer :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k} = \frac{2n+1}{4^n}\binom{2n}{n}$$

Exercice 14

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\, u_k\, u_{n-k}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 4^{n+1} n!$.

2. ***a)*** Montrer que la somme f de la série entière $\sum\ \dfrac{u_n}{n!}\ x^n$ est solution de l'équation différentielle $y' = y^2$ sur un intervalle à préciser.

b) En déduire une expression simplifiée de f, sur un intervalle où f ne s'annule pas.

3. Expliciter, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme général u_n en fonction de n.

Exercice 15
Soit l'équation différentielle : $x\,(x-1)\;y''+3\,x\;y'+y=0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r>0$.
Déterminer la somme des séries entières obtenues.

2. Est-ce que toutes les solutions de $x\,(x-1)\;y''+3\,x\;y'+y=0$ sur $]0,1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$?

Exercice 16
Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_0=v_0=1$ et :

$$\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N},\; u_{n+1} &= & u_n-v_n \\ \forall n\in\mathbb{N},\; v_{n+1} &= & u_n-2v_n \end{cases}$$

Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum\; u_n\,x^n$ et $\sum\; v_n\,x^n$ et calculer leurs sommes.

Exercice 17
Pour $n\geqslant 0$, on pose : $a_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\;(\cos t)^n\;\sin(nt)\;dt$.

1. Calculer a_0 , a_1 et a_2.

2. Pour $x\in\,]-1,1[$, calculer $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$.

3. Déterminer le rayon de convergence de $f(x)$.

4. Valeur de a_n ?

Exercice 18
Dans la suite, on note :

× f la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1}\big(\ln(n)\big)\,x^n$ et R_f son rayon.

× g la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 2}\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\;x^n$ et R_g son rayon.

1. Déterminer les rayons de convergence R_f et R_g.

2. Montrer que g est définie et continue sur $[-1,1[$.

3. Trouver une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$.

4. Montrer que f est continue sur $[-1,1[$ et trouver des équivalents de f et g en 1.

Exercice 19
Soit la suite (a_n) définie par : $\begin{cases} a_0=-4, \\ a_1=2, \\ a_2=4 \\ \forall n\in\mathbb{N},\;\; a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}-a_n \end{cases}$.

1. Montrer : $\forall n\in\mathbb{N},\;|a_n|\leqslant 2^{n+2}$.

2. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum\; a_nx^n$ est non nul.

3. On pose $\rho=\min\{1,R\}$ et, lorsque c'est possible, $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$.

  a) Montrer : $\forall x\in]-\rho,\rho[,\;S(x)=\dfrac{-4+6x+6x^2}{(x+1)(x-1)^2}$.

b) Montrer qu'il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\dfrac{-4+6x+6x^2}{(x+1)(x-1)^2}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{(x-1)^2}+\dfrac{c}{x-1}$.

4. Calculer a_n en fonction de n.

Exercice 20 *(d'après* `E3A 2017 - PC-2`*)*
On s'intéresse dans cette partie à l'équation différentielle :

$$xy''+y'-(x+1)y=1$$

1. On suppose qu'il existe une solution θ développable en série entière de cette équation différentielle. On note alors $\theta(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ pour tout $x\in\,]-r,r[$ où $r>0$ est le rayon de convergence et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

a) Déterminer alors une relation entre a_1 et a_0, ainsi qu'une relation entre a_{n+2},a_{n+1} et a_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

b) Pour une telle suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer qu'il existe $K>0$ telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ |a_n|\leqslant\frac{K}{n!}$$

En déduire qu'une telle solution θ existe et que de plus $r=+\infty$.

2. On souhaite résoudre ici cette équation différentielle sur l'intervalle $I=\mathbb{R}_+^*$ et l'on note :

$$S=\left\{y\in\mathscr{C}^2(I,\mathbb{R})\ \middle|\ \forall x>0,\ xy''(x)+y'(x)-(x+1)y(x)=1\right\}$$

a) Pour tout $y\in\mathscr{C}^2(I,\mathbb{R})$, on pose $z(x)=\mathrm{e}^{-x}y(x)$ pour tout $x>0$.
Montrer que $y\in S$ si et seulement si z vérifie :

$$\forall x>0,\ xz''(x)+(2x+1)z'(x)=\mathrm{e}^{-x}\qquad(\star)$$

b) Déterminer les fonctions $Z\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x>0,\ xZ'(x)+(2x+1)Z(x)=0$$

c) Déterminer les $Z\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x>0,\ xZ'(x)+(2x+1)Z(x)=\mathrm{e}^{-x}$$

d) En déduire l'expression des fonctions $z\in\mathscr{C}^2(I,\mathbb{R})$ vérifiant $(\star)$ de ***2.a)***, en utilisant la fonction R définie pour $x>0$ par $R(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt$.
(on utilisera $R(x)$ et $R(2x)$)

e) Donner alors l'expression de la solution générale $y\in S$.

3. ***a)*** Sachant que $R(x)=-\ln(x)+\gamma+o(1)$ quand $x\to0$ avec $x>0$, déterminer les solutions $y\in S$ ayant une limite finie en 0.
Exprimer alors ces solutions en utilisant la fonction S de la partie ***I*** et reliée à R par :

$$S(x)=R(x)+\ln(x)+\gamma\text{ pour }x>0$$

(vu en ***I.3.c)***).

b) Sachant que S est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, donner l'expression des solutions f de la question ***1.*** : on exprimera $f(x)$ en fonction de $S(x)$ et $S(2x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
Comment pourrait-on obtenir une expression des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ***1.***?

Exercice 21 *(d'après* `E3A 2022 - PSI`*)*

1. **Question de cours**

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et T-périodique.

Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_x^{x+T} f(u)\ du = \int_0^T f(u)\ du.$

$* * * * *$

On se propose de déterminer des fonctions y de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tout réel x, la relation :

$$xy''(x) + y'(x) - 4xy(x) = 0 \qquad (**)$$

2. On suppose qu'il existe une fonction g, développable en série entière, de rayon de convergence non nul, vérifiant $(**)$, sous la forme $g : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et telle que : $g(0) = a_0 = 1$.

a) Prouver que $a_1 = 0$ et déterminer pour tout $n \geqslant 1$ une relation entre a_{n-1} et a_{n+1}.

b) Déterminer alors a_n pour tout entier naturel n.

c) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g ainsi obtenue.