Colles

semaine 20 : 10 février - 15 février

Questions de cours

Exercice 1
Caractérisation des isométries vectorielles.

Exercice 2
Classification des matrices orthogonales en dimension 2.

Exercice 3
Loi du minimum de deux variables indépendantes qui suivent des lois géométriques.

Exercices

Variables aléatoires discrètes, calcul d'espérance / variances

Exercice 4
Soit X une variable aléatoire telle $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big) = \dfrac{k-1}{2^k}$.

1. Vérifier par le calcul que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big) = 1$.

2. Donner la fonction génératrice de X. Quel est son rayon de convergence ?

3. La variable X admet-elle une espérance finie ? Si oui, que vaut-elle ?

Exercice 5
Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. On note A l'événement « X prend une valeur paire ». On pose en outre $X_0 = X \times 1_A$ et $X_1 = X \times \mathbb{1}_{\overline{A}}$.

1. Calculer $\mathbb{P}(A)$ et la comparer avec $\dfrac{1}{2}$.

2. Déterminer la fonction génératrice de X_0.
Montrer que X_0 admet une espérance et la calculer.

3. Montrer que X_1 admet une espérance, la calculer et la comparer à $\mathbb{E}(X_0)$.

Exercice 6

1. Donner le développement en série entière de $\dfrac{1}{(1-x)^n}$ pour $n=1$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. On définit, pour $k \in \mathbb{N},\ p_k = \dbinom{n+k-1}{k} p^n\, q^k$ avec $p \in \,]0,1[$ et $q = 1-p$.
Montrer que la suite (p_k) définit une probabilité sur $\mathbb{N}$.

3. On définit la loi d'une variable aléatoire X par : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big) = p_k$.
Déterminer la fonction génératrice de X.

4. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 7

- Soit X une variable aléatoire aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
- On définit Y de la façon suivante :
  - × si la valeur prise par X est paire, Y prend la moitié de la valeur prise par X.
  - × si la valeur prise par X est impaire, Y prend la valeur 0.

Donner la loi de Y, son espérance et sa variance.

Exercice 8

Soit X une variable aléatoire vérifiant $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et d'espérance finie.

1. Montrer que $\dfrac{1}{X}$ est d'espérance finie.

2. On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre $p < 1$.
Montrer que $\dfrac{1}{\mathbb{E}(X)} \leqslant \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

3. Montrer cette inégalité dans le cas général.

Exercice 9

On considère une urne contenant des boules numérotées de 1 à n. On dispose d'un jeton mobile sur un axe gradué de 0 à n ; la position initiale du jeton est 0. On effectue des tirages avec remise dans l'urne et à chaque tirage, si le numéro de la boule est inférieur ou égal à la position du jeton, on déplace le jeton d'une graduation vers la gauche, et si le numéro de la boule est strictement supérieur à la position du jeton, on le déplace d'une graduation vers la droite.

1. Donner les positions possibles du jeton après p tirages.

2. On note X_p la position du jeton après p tirages.
Exprimer $\mathbb{P}\big(\{X_{p+1} = 0\}\big)$ en fonction de $\mathbb{P}\big(\{X_p = 1\}\big)$ et $\mathbb{P}\big(\{X_{p+1} = n\}\big)$ en fonction de $\mathbb{P}\big(\{X_p = n-1\}\big)$.

3. Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, exprimer $\mathbb{P}\big(\{X_{p+1} = k\}\big)$ en fonction de $\mathbb{P}\big(\{X_p = k-1\}\big)$ et $\mathbb{P}\big(\{X_p = k+1\}\big)$.

4. Rappeler pourquoi la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ existe au moins sur l'intervalle $[-1, 1]$. On note G_p la fonction génératrice de X_p, pourquoi G_p est-elle polynomiale ?

5. On admet que $G_{p+1}(t) = t\, G_p(t) + \dfrac{1-t^2}{n}\, G'_p(t)$ pour tous t et p.
Montrer que $\mathbb{E}(X_{p+1}) = 1 + \left(1 - \dfrac{2}{n}\right) \mathbb{E}(X_p)$.

6. Déterminer $\mathbb{E}(X_p)$.

Exercice 10

- On lance une pièce équilibrée.
- Soit X la variable aléatoire réelle donnant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux fois face.

Calculer la loi et l'espérance de X, si elle existe.

Exercice 11

- On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
- On note X_n le rang du premier tirage où l'on obtient une boule différente de la première boule tirée.

1. Justifier que X_n est bien une variable aléatoire discrète et donner sa loi.

2. Justifier l'existence de l'espérance de X_n et la calculer.

3. On note Y_n le rang du premier tirage à l'issue duquel toutes les boules ont été tirées au moins une fois. Donner la loi de Y_2 puis celle de Y_3.

Exercice 12

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$. Démontrer :

$$\forall a \in]0, +\infty[, \mathbb{P}\left(\left\{ \left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(Y_1)\right| \geqslant a\right\}\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(Y_1)}{n\,a^2}$$

3. **Application** :
On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage

Exercice 13

Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big(\{X = n\}\big) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

2. Calculer λ.

3. Prouver que X est d'espérance finie et la calculer.

4. La variable X est-elle de variance finie ? Justifier.

Exercice 14

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier supérieur ou égal à 3.
On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte de trois compartiments identiques également numérotées de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules.
Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.

2. ***a)*** Déterminer la probabilité $\mathbb{P}\big(\{X = 2\}\big)$.
b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.

3. ***a)*** Calculer $\mathbb{E}(X)$.
b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X)$. Interpréter ce résultat.

Exercice 15

Soit $\mathbb{N} \in \mathbb{N}^*$.
Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.
On considère N variables aléatoires X_1, ..., X_N définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer $\mathbb{P}\big(\{X_i \leqslant n\}\big)$, puis $\mathbb{P}\big(\{X_i > n\}\big)$.

2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min(X_1, \dots, X_N)$ définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \dots, X_N(\omega))$$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}\big(\{Y \leqslant n\}\big)$ puis $\mathbb{P}\big(\{Y = n\}\big)$.

b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $\mathbb{E}(Y)$.

Couples de variables aléatoires

Exercice 16

Deux joueurs jouent avec des pièces équilibrées.

Ils lancent chacun n fois une pièce.

Celui qui gagne est celui qui obtient le plus grand nombre de fois pile.

Quelle est la probabilité qu'il y ait un gagnant ?

Exercice 17

- Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in \,]0,1[$.
- On pose $q = 1 - p$, $S = X + Y$ et $D = X - Y$.

1. Déterminer la loi de S.

2. Soit $n \geqslant 2$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $\{S = n\}$.

3. Déterminer la loi de D.

4. Calculer $\mathrm{Cov}(S, D)$. Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?

Exercice 18

Des électrons sont émis pendant une période T.

On suppose que le nombre N d'électrons émis pendant cette période suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Un électron est efficace avec une probabilité p.

Soit X (resp. Y) le nombre d'électrons efficaces (resp. inefficaces).

1. Pour $j \in \mathbb{N}$, déterminer la loi de X conditionnellement à l'événement $\{N = j\}$.

2. Déterminer la loi conjointe du couple (X, N).

3. En déduire la loi de X. Donner sans calcul $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

4. Montrer que X et Y sont indépendantes.

5. En remarquant que $N = X + Y$, calculer $\mathrm{Cov}(X, N)$.

Exercice 19

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de même loi.

On suppose que la variable $Z = X + Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Déterminer l'espérance de X.

2. Calculer la fonction génératrice de X.

3. Expliciter la loi de X.

Exercice 20
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, et telles que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}\big(\{X = i, Y = j\}\big) = \frac{a}{(i+j+1)!}$$

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.
Justifier que R_n est bien défini, et l'interpréter à l'aide d'une variable aléatoire Z suivant la loi $\mathcal{P}(1)$.
En déduire que la série de terme général R_n converge, et calculer sa somme.

2. Déterminer a.

3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 21
Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leqslant n$. On effectue une suite de tirages avec remise dans une urne contenant $n+1$ jetons numérotés de 0 à n. On note T le rang du tirage où, pour la première fois, on tire un jeton de numéro inférieur ou égal à m. On note alors X le numéro obtenu lors de ce T-ème tirage.

1. Déterminer la loi de T, et la loi conjointe de T et X.

2. Déterminer la loi de X.

Exercice 22
Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p.
On pose $q = 1 - p$ et $Y = |X_1 - X_2|$, et $Z = \min(X_1, X_2)$.

1. Calculer $\mathbb{P}\big(\{Y = 0\}\big)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{P}\big(\{X_1 - X_2 = n\}\big) = \frac{pq^n}{1+q}$. En déduire la loi de Y.

2. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

3. Montrer que $\mathbb{E}\big((X_1 - X_2)^2\big) = 2\,\mathbb{V}(X_1)$. En déduire que Y admet une variance et la calculer.

4. Montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.

5. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 23
Une urne contient initialement deux boules vertes et une boule noire.

À chaque étape, on tire une boule dans l'urne, et on la remet avec une boule supplémentaire de la même couleur.

La variable aléatoire X (resp. Y) désigne le rang de la première boule verte (resp. noire) tirée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire Z_n désigne le nombre de boules vertes dans l'urne après n étapes. Enfin U_n est la variable aléatoire valant 1 si la boule tirée à la n^e étape est verte et 0 sinon.

1. Déterminer les lois de X et Y.

2. Exprimer Z_n en fonction de certains des $(U_i)_{i \geqslant 1}$ et déterminer $Z_n(\Omega)$.

3. Calculer $\mathbb{P}\big(\{U_{n+1} = 1\} \mid \{Z_n = k\}\big)$.

4. Démontrer par récurrence que U_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Montrer que pour tous n, $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\big(\{Z_{n+1} = k\}\big) = \frac{n+3-k}{n+3}\mathbb{P}\big(\{Z_n = k\}\big) + \frac{k-1}{n+3}\mathbb{P}\big(\{Z_n = k-1\}\big)$$

En déduire une relation de récurrence entre les fonctions génératrices, puis entre les espérances, des variables aléatoires Z_{n+1} et Z_n. En déduire l'espérance de Z_n en fonction de n.

Exercice 24

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

1. Calculer l'espérance et la variance de $Z = X - Y$. Donner la loi de Z.

2. Les variables X et Z sont-elles indépendantes ?
Calculer la covariance de X et Z.

Exercice 25

Soient $a, n \in \mathbb{N}^*$. On considère $N = an$ clients qui s'approvisionnent chez n fournisseurs. Chaque client choisit un fournisseur au hasard. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i le nombre de clients du fournisseur i et Y le nombre de fournisseurs n'ayant aucun client.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de X_i.

2. Que vaut $X_1 + \cdots + X_n$?
En déduire $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ de X_i et X_j, pour $i \neq j$.

3. Soit β_i la variable aléatoire indicatrice de l'événement : « le fournisseur i n'a pas de client ». Exprimer Y en fonction des β_i. Déterminer $\mathbb{E}(Y)$.

4. Calculer $\mathrm{Cov}(\beta_i, \beta_j)$.

5. Déterminer la variance de Y.

Exercice 26

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.

On pose $U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $M = U\ {}^tU$.

1. Déterminer la loi de probabilité de $\mathrm{rg}(M)$ et de $\mathrm{tr}(M)$.

2. Quelle est la probabilité que M soit une matrice de projection ?

3. On suppose $n = 2$. Soit $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $S = {}^tVMV$. Déterminer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathbb{V}(S)$.

Exercice 27

Trois individus A_1, A_2 et A_3 se présentent dans un bureau de poste comportant deux guichets. Les individus A_1 et A_2 sont pris en charge dès leur arrivée, A_3 doit attendre que A_1 ou A_2 ait fini pour passer à son tour au guichet. Le temps passé au guichet par A_i est noté X_i ($1 \leqslant i \leqslant 3$). On suppose que chaque X_i suit une loi géométrique de paramètre p, et que les X_i sont mutuellement indépendantes. On note Y le temps d'attente de A_3 avant son passage au guichet.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}\big(\{Y > n\}\big)$. En déduire la loi et l'espérance de Y.

2. Soit Z le temps total passé par A_3 à la poste. Donner la loi de Z.

3. Déterminer le temps moyen passé par A_3 à la poste.

Exercice 28

On dispose de N dés à 6 faces équilibrés. On les lances tous, on retire ceux qui ont donné 6, et on recommence l'opération avec les dés restants jusqu'à ne plus avoir de dé. On note X_i la variable aléatoire égale au nombre de fois où le i-ème dé a été lancé, et Y le nombre total de lancers effectués durant l'expérience.

1. Calculer $\mathbb{P}\big(\{X_i \leqslant n\}\big)$.

2. Soit $Y = \max(X_1, X_2, \ldots, X_N)$. Calculer $\mathbb{P}\big(\{Y \leqslant n\}\big)$; en déduire $\mathbb{P}\big(\{Y = n\}\big)$.

3. Montrer que Y admet une espérance.

Exercice 29

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big) = p_n$.

La fonction génératrice de X est notée G_X et elle est définie par $G_X(t) = \mathbb{E}[t^X] = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n\, t^n$.

1. Prouver que l'intervalle $]-1,1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de G_X.

2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On pose $S = X_1 + X_2$.
Démontrer que $\forall t \in\,]-1,1[$, $G_S(t) = G_{X_1}(t)\, G_{X_2}(t)$:

a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières.

b) en utilisant la définition de la fonction génératrice par $G_X(t) = \mathbb{E}[t^X]$.

Remarque : on admettra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.
On note S_n la somme des numéros tirés.
Soit $t \in\,]-1,1[$.
Déterminer $G_{S_n}(t)$ puis en déduire la loi de S_n.

Exercice 30

Soit (X,Y) un couple de variable aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}\big(\{(X,Y) = (j,k)\}\big) = \frac{(j+k)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

2. Prouver que $\mathbb{E}[2^{X+Y}]$ existe et la calculer.

Exercice 31

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in\,]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.

2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big(\{Y = k\} \mid \{X = i\}\big)$.

b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.

Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\dbinom{n-i}{k-i}\dbinom{n}{i} = \dbinom{k}{i}\dbinom{n}{k}$.

c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 32
Remarque : les questions ***1.*** et ***2.*** sont indépendantes.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. ***a)*** Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \big(\,]0, +\infty[\, \big)^2$. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.

2. Soit $p \in \,]0, 1[$. Soit $\lambda \in \,]0, +\infty[$.
Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $\{Y = m\}$ est une loi binomiale de paramètre (m, p).
Déterminer la loi de X.

Exercice 33
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) = \mathbb{P}\big(\{Y = k\}\big) = p\,q^k$ où $p \in \,]0, 1[$ et $q = 1 - p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V).

2. Déterminer la loi marginale de U.
On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big(\{V = n\}\big) = p\,q^{2n}\,(1 + q)$.

3. Prouver que $W = V + 1$ suit une loi géométrique.
En déduire l'espérance de V.

4. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 34
On considère une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $\{1, 2\}$ et une variable aléatoire Y suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que X et Y sont indépendantes et on définit la variable aléatoire $Z = X\,Y$.

1. Déterminer la loi de Z. Justifier qu'elle possède une espérance et une variance puis les calculer.

2. Déterminer la probabilité que Z soit pair.

Exercice 35
Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}\big(\{X = i\} \cap \{Y = j\}\big) = \frac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1}\,j!}$$

1. Déterminer les lois de X et de Y.

2. ***a)*** Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.

b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.

3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

4. Calculer $\mathbb{P}\big(\{X = Y\}\big)$.

Exercice 36
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On considère la série entière $\sum t^n \, \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)$ de variable réelle t.
On note R_X son rayon de convergence.

a) Prouver que $R_X \geqslant 1$.
On pose $G_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n \, \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)$ et on note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
Justifier que $[-1, 1] \subset D_{G_X}$.
Pour tout réel t fixé de $[-1, 1]$, exprimer $G_X(t)$ sous forme d'une espérance.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant la réponse, $\mathbb{P}\big(\{X = k\}\big)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.

2. *a)* On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
Déterminer D_{G_X} et, pour tout $t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.

b) Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilité, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X + Y$.

Exercice 37
On admet, dans cet exercice, que : $\forall q \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et :

$$\forall x \in \,]-1, 1[, \quad \sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} \; = \; \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$$

Soit $p \in \,]0, 1[$.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}\big(\{X = k\} \cap \{Y = n\}\big) \; = \; \begin{cases} \dbinom{n}{k} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n p\,(1-p)^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.

2. *a)* Déterminer la loi de Y.

b) Prouver que $1 + Y$ suit une loi géométrique.

c) Déterminer l'espérance de Y.

3. Déterminer la loi de X.

Exercice 38
Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}\big(\{X = k\} \cap \{Y = n\}\big) = \dfrac{k+n}{2\,k!\,n!} \mathrm{e}^{-2}$.

1. Vérifier que l'on a ainsi défini la loi du couple (X, Y).

2. Déterminer la loi de $X + Y$ et reconnaître celle de $X + Y - 1$.

3. En déduire que $X + Y$ admet une espérance et la déterminer.

4. Déterminer la loi de X. *On admet que Y a la même loi que X.*

5. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 39

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien.

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur E et $n = \dim(E)$.

1. Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$.

a) Démontrer : $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

b) Démontrer que u est bijectif.

2. Démontrer que l'ensemble $\mathrm{O}(E)$ des isométries vectorielles de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe.

3. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Prouver que : $u \in \mathrm{O}(E) \ \Leftrightarrow\ \big(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)\big)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 40

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien.

Soit u un endomorphisme de E.

1. Montrer que u est une isométrie de E si et seulement si $\forall\,(x,y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^{-1}(y)\rangle$.

2. Montrer que deux des propriétés suivantes entraînent la troisième :

(i) u est une isométrie ***(ii)*** $u^2 = -\mathrm{id}$ ***(iii)*** $\forall\,(x,y) \in E \times E,\ \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$

Exercice 41

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathrm{O}(E)$ et soit V un sous-espace vectoriel de E.

On suppose que s est une isométrie vectorielle et une symétrie.

Montrer que s est une symétrie orthogonale.

Exercice 42

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien.

Soient f et g deux endomorphismes de E tels que : $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|g(x)\|$.

1. Montrer : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$.

2. Montrer : $\forall (x,y) \in E \times E,\ \langle f(x), f(y)\rangle = \langle g(x), g(y)\rangle$.

3. En déduire l'existence d'une isométrie $\varphi \in \mathrm{O}(E)$ tel que : $g = \varphi \circ f$.

Exercice 43

Soit E un espace euclidien de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.

Soit f un endomorphisme de E qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x,y) \in E, \langle x, y\rangle = 0 \ \Rightarrow\ \langle f(x), f(y)\rangle = 0$$

1. Que dire de la famille $\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$?

2. ***a)*** Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. En calculant le produit scalaire $\langle f(e_i) + f(e_j), f(e_i) - f(e_j)\rangle$ de deux façons, montrer qu'il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \|f(e_i)\| = \alpha$.

b) Pour tout $x \in E$, déterminer alors $\|f(x)\|$.

3. Montrer qu'il existe une isométrie $g \in \mathrm{O}(E)$ telle que $f = \alpha \cdot g$.

Exercice 44

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable de 4 façons différentes : sans calcul - avec ses éléments propres - avec le théorème du rang - en calculant A^2.

2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u dans une base orthonormale d'un espace euclidien E.

a) Que dire de u ?

b) Donner une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exercice 45

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace vectoriel euclidien.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E et soit $(f, g) \in \mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E)$.

1. a) Pour tout $x \in E$, rappeler l'expression de x dans la base $\mathscr{B}$.

b) Déterminer $\mathrm{tr}(f)$ en fonction des e_i et des $f(e_i)$.

2. On suppose f et g sont des endomorphismes auto-adjoints positifs.

Montrer que $\mathrm{tr}(f \circ g) \geqslant 0$.

Exercice 46

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.

On suppose que E est de dimension $n \geqslant 1$.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.

Soit p un projecteur de E de rang égal à 1.

On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$, et p^* l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est ${}^tA$.

1. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement s'il est auto-adjoint.

2. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \|\, p(e_k)\, \|^2$.

3. a) Montrer que $\forall (x, y) \in E^2, \langle p(x), y\rangle \;=\; \langle x, p^*(y)\rangle$.

b) Montrer que $\mathrm{Ker}\,\big(p^* \circ p\big) = \mathrm{Ker}(p)$.

c) On suppose : $\sum\limits_{k=1}^{n} \|\, p(e_k)\, \|^2 = 1$. Montrer que p est un projecteur orthogonal.