Colles

semaine 22 : 11 mars - 16 mars

Questions de cours

Exercice 1
Caractérisation des isométries vectorielles (avec démonstration).

Exercice 2
Classification de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$. Énoncé et démonstration.

Exercice 3
Caractérisation du caractère défini / défini-positif des endomorphismes auto-adjoints.
Énoncé et démonstration.

Exercices

Exercice 4
Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.
On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur E et $n = \dim(E)$.

1. Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.
   a) Démontrer : $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
   b) Démontrer que u est bijectif.

2. Démontrer que l'ensemble $\mathrm{O}(E)$ des isométries vectorielles de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe.

3. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Prouver que : $u \in \mathrm{O}(E) \Leftrightarrow \big(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)\big)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 5
Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.
Soit u un endomorphisme de E.

1. Montrer que u est une isométrie de E si et seulement si $\forall\,(x, y) \in E^2$, $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^{-1}(y)\rangle$.

2. Montrer que deux des propriétés suivantes entraînent la troisième :
   (i) u est une isométrie   ***(ii)*** $u^2 = -\mathrm{id}$ ***(iii)*** $\forall\,(x, y) \in E \times E$, $\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$

Exercice 6
Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.
Soit $f \in \mathrm{O}(E)$ et soit V un sous-espace vectoriel de E.
On suppose que s est une isométrie vectorielle et une symétrie.
Montrer que s est une symétrie orthogonale.

Exercice 7
Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.
Soient f et g deux endomorphismes de E tels que : $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|g(x)\|$.

1. Montrer : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$.

2. Montrer : $\forall (x, y) \in E \times E$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle g(x), g(y)\rangle$.

3. En déduire l'existence d'une isométrie $\varphi \in \mathrm{O}(E)$ tel que : $g = \varphi \circ f$.

Exercice 8

Soit E un espace euclidien de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire et $\| \cdot \|$ la norme associée.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.

Soit f un endomorphisme de E qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in E, \langle x, y \rangle = 0 \;\Rightarrow\; \langle f(x), f(y) \rangle = 0$$

1. Que dire de la famille $\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$?

2. ***a)*** Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. En calculant le produit scalaire $\langle f(e_i) + f(e_j), f(e_i) - f(e_j) \rangle$ de deux façons, montrer qu'il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\|f(e_i)\| = \alpha$.

b) Pour tout $x \in E$, déterminer alors $\|f(x)\|$.

3. Montrer qu'il existe une isométrie $g \in \mathrm{O}(E)$ telle que $f = \alpha \cdot g$.

Exercice 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable de 4 façons différentes : sans calcul - avec ses éléments propres - avec le théorème du rang - en calculant A^2.

2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u dans une base orthonormale d'un espace euclidien E.

a) Que dire de u ?

b) Donner une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exercice 10

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace vectoriel euclidien.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E et soit $(f, g) \in \mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E)$.

1. ***a)*** Pour tout $x \in E$, rappeler l'expression de x dans la base $\mathscr{B}$.

b) Déterminer $\mathrm{tr}(f)$ en fonction des e_i et des $f(e_i)$.

2. On suppose f et g sont des endomorphismes auto-adjoints positifs.

Montrer que $\mathrm{tr}(f \circ g) \geqslant 0$.

Exercice 11

Soit $\big(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace euclidien.

On suppose que E est de dimension $n \geqslant 1$.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.

Soit p un projecteur de E de rang égal à 1.

On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$, et p^* l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est ${}^tA$.

1. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement s'il est auto-adjoint.

2. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \| p(e_k) \|^2$.

3. ***a)*** Montrer que $\forall (x, y) \in E^2, \langle p(x), y \rangle \;=\; \langle x, p^*(y) \rangle$.

b) Montrer que $\mathrm{Ker}\big(p^* \circ p\big) = \mathrm{Ker}(p)$.

c) On suppose : $\sum\limits_{k=1}^{n} \| p(e_k) \|^2 = 1$. Montrer que p est un projecteur orthogonal.

Exercice 12

1. On note $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n dont les valeurs propres sont strictement positives.

Montrer que pour $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, on a $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$, on a ${}^tXSX > 0$.

2. Soient $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $B = SAS$.

Montrer que $B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si S est inversible et $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 13

On note $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

2) Montrer que : $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \iff \forall P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $P^{-1}AP$ est de diagonale nulle.

Exercice 14

Soit $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien.

On note $\mathscr{S}(E)$ l'espace des endomorphismes auto-adjoints de E et $\mathscr{S}^+(E)$ celui des endomorphismes auto-adjoints de valeurs propres positives.

1. Déterminer un endomorphisme auto-adjoint de $\mathbb{R}^3$ laissant invariant le plan $x_1 + x_2 = 0$.

2. Soit $f \in \mathscr{S}(E)$.

Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

3. Soit $f \in \mathscr{S}(E)$.

Montrer : $f \in \mathscr{S}^+(E) \iff \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$.

4. Soit $(f, g) \in \big(\mathscr{S}^+(E)\big)^2$.

Montrer : $\mathrm{Ker}(f+g) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(f+g) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 15

On note $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques S de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geqslant 0$$

1. Soit $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.
Montrer : $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$.

2. Soit f un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E.
On suppose : $\mathrm{Sp}\, f \subset \mathbb{R}_+$.

Montrer que le noyau de f est l'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux à leur image par f.

3. Soient $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ quelconques.

a) Montrer que ${}^tASA = 0$ si et seulement si $SA = 0$.

b) Montrer que l'ensemble $\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tASA = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension en fonction du rang de S.

Exercice 16

On note $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques S de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXMX \geqslant 0$$

1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.
Montrer que $M \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont positives.
Soit $M \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\{\mu_1, \dots, \mu_p\}$ ses valeurs propres deux à deux distinctes.

2. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\leqslant p-1$ tel que $P(\mu_i) = \sqrt{\mu_i}$ tout $1 \leqslant i \leqslant p$.

3. Montrer que $P(M) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $P(M)^2 = M$.

Exercice 17

Soit E un espace euclidien. On dit qu'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est une contraction lorsque :

$$\forall x \in E,\ \|f(x)\| \ \leqslant\ \|x\|$$

1. Soit f un endomorphisme auto-adjoint. Montrer :

$$f \text{ est une contraction } \Leftrightarrow \ \mathrm{Sp}(f) \subset [-1, 1]$$

2. Montrer que si f est un endomorphisme auto-adjoint alors, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout $x \in E$, on a :

$$\|\,P(f)(x)\,\| \leqslant \|x\| \times \left(\sup_{a \in \mathrm{Sp}(f)} |\,P(a)\,| \right)$$