

Colles

semaine 23 : 18 mars - 23 mars

Questions de cours

Exercice 1

Notons $E = \mathbb{R}^3$.

On note f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique de E est (étudier l'un des cas) :

$$A_2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & -1 \\ -4 & 1 & -8 \end{pmatrix}, \text{ puis } A_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et enfin } A_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que f est une rotation et en déterminer les caractéristiques (angle et axe).

Exercice 2

Borne supérieure d'une partie de la forme kA et norme sur $\mathcal{B}(I, K)$.

Exercice 3

Caractérisation du caractère défini / défini-positif des endomorphismes auto-adjoints.
Énoncé et démonstration.

Exercices

Exercice 4

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur E et $n = \dim(E)$.

1. Soit u un endomorphisme de E , tel que : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.

a) Démontrer : $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

b) Démontrer que u est bijectif.

2. Démontrer que l'ensemble $O(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi $\circ$, est un groupe.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

Prouver que : $u \in O(E) \Leftrightarrow (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E .

Exercice 5

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Soit u un endomorphisme de E .

1. Montrer que u est une isométrie de E si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^{-1}(y) \rangle$.

2. Montrer que deux des propriétés suivantes entraînent la troisième :

(i) u est une isométrie (ii) $u^2 = -\text{id}$ (iii) $\forall (x, y) \in E \times E, \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle$

Exercice 6

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Soit $f \in O(E)$ et soit V un sous-espace vectoriel de E .

On suppose que s est une isométrie vectorielle et une symétrie.
Montrer que s est une symétrie orthogonale.

Exercice 7

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Soient f et g deux endomorphismes de E tels que : $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|g(x)\|$.

1. Montrer : $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$.
2. Montrer : $\forall (x, y) \in E \times E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle g(x), g(y) \rangle$.
3. En déduire l'existence d'une isométrie $\varphi \in \text{O}(E)$ tel que : $g = \varphi \circ f$.

Exercice 8

Soit E un espace euclidien de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E .

Soit f un endomorphisme de E qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in E, \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = 0$$

1. Que dire de la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$?
2. a) Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. En calculant le produit scalaire $\langle f(e_i) + f(e_j), f(e_i) - f(e_j) \rangle$ de deux façons, montrer qu'il existe $\alpha \geq 0$ tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \|f(e_i)\| = \alpha$.
b) Pour tout $x \in E$, déterminer alors $\|f(x)\|$.
3. Montrer qu'il existe une isométrie $g \in \text{O}(E)$ telle que $f = \alpha \cdot g$.

Exercice 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable de 4 façons différentes : sans calcul - avec ses éléments propres - avec le théorème du rang - en calculant A^2 .
2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u dans une base orthonormale d'un espace euclidien E .
a) Que dire de u ?
b) Donner une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exercice 10

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$.

1. a) Pour tout $x \in E$, rappeler l'expression de x dans la base $\mathcal{B}$.
b) Déterminer $\text{tr}(f)$ en fonction des e_i et des $f(e_i)$.
2. On suppose f et g sont des endomorphismes auto-adjoints positifs.
Montrer que $\text{tr}(f \circ g) \geq 0$.

Exercice 11

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

On suppose que E est de dimension $n \geq 1$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

Soit p un projecteur de E de rang égal à 1.

On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$, et p^* l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est tA .

1. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement s'il est auto-adjoint.
2. Démontrer : $\sum_{k=1}^n \|p(e_k)\|^2 = \text{tr}(p^* \circ p)$.
3. a) Montrer que $\forall (x, y) \in E^2, \langle p(x), y \rangle = \langle x, p^*(y) \rangle$.
 b) Montrer que $\text{Ker}(p^* \circ p) = \text{Ker}(p)$.
 c) On suppose : $\sum_{k=1}^n \|p(e_k)\|^2 = 1$. Montrer que p est un projecteur orthogonal.

Exercice 12

1. On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n dont les valeurs propres sont strictement positives.
 Montrer que pour $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq 0$, on a ${}^tXMX > 0$.
2. Soient $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $B = SAS$.
 Montrer que $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si S est inversible et $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 13

On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 1) Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
- 2) Montrer que : $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall P \in \text{O}_n(\mathbb{R}), P^{-1}AP$ est de diagonale nulle.

Exercice 14

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

On note $\mathcal{S}(E)$ l'espace des endomorphismes auto-adjoints de E et $\mathcal{S}^+(E)$ celui des endomorphismes auto-adjoints de valeurs propres positives.

1. Déterminer un endomorphisme auto-adjoint de $\mathbb{R}^3$ laissant invariant le plan $x_1 + x_2 = 0$.
2. Soit $f \in \mathcal{S}(E)$.
 Montrer que $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E .
3. Soit $f \in \mathcal{S}(E)$.
 Montrer : $f \in \mathcal{S}^+(E) \Leftrightarrow \text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$.
4. Soit $(f, g) \in (\mathcal{S}^+(E))^2$.
 Montrer : $\text{Ker}(f + g) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$ et $\text{Im}(f + g) = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.

Exercice 15

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXSX \geq 0$$

1. Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.
 Montrer : $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$.

2. Soit f un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E .

On suppose : $\text{Sp } f \subset \mathbb{R}_+$.

Montrer que le noyau de f est l'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux à leur image par f .

3. Soient $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconques.

a) Montrer que ${}^tASA = 0$ si et seulement si $SA = 0$.

b) Montrer que l'ensemble $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^tASA = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension en fonction du rang de S .

Exercice 16

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXMX \geq 0$$

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

Montrer que $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont positives.

Soit $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\{\mu_1, \dots, \mu_p\}$ ses valeurs propres deux à deux distinctes.

2. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\leq p-1$ tel que $P(\mu_i) = \sqrt{\mu_i}$ tout $1 \leq i \leq p$.

3. Montrer que $P(M) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $P(M)^2 = M$.

Exercice 17

Soit E un espace euclidien. On dit qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est une contraction lorsque :

$$\forall x \in E, \|f(x)\| \leq \|x\|$$

1. Soit f un endomorphisme auto-adjoint. Montrer :

$$f \text{ est une contraction} \Leftrightarrow \text{Sp}(f) \subset [-1, 1]$$

2. Montrer que si f est un endomorphisme auto-adjoint alors, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout $x \in E$, on a :

$$\|P(f)(x)\| \leq \|x\| \times \left(\sup_{a \in \text{Sp}(f)} |P(a)| \right)$$

Exercice 18 (d'après E3A 2020 MP)

1. On considère le trinôme du second degré à coefficients complexes $aX^2 + bX + c$ dont on note s_1 et s_2 les racines.

Donner, sans démonstration, les expressions de $\sigma_1 = s_1 + s_2$ et de $\sigma_2 = s_1 s_2$ à l'aide des coefficients a, b et c .

2. Soient a et b deux réels et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_1 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$$

On note r_1 et r_2 les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation caractéristique associée à cette suite.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_n en fonction de r_1, r_2 et n .

On sera amené à distinguer trois cas et il n'est pas demandé d'exprimer les constantes qui apparaissent en fonction de u_0 et de u_1 .

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites réelles $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ indexées par $\mathbb{Z}$ telles que les sous-suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.

On admettra que l'ensemble E des suites réelles indexées par $\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

L'endomorphisme identité de l'espace E sera noté id_E .

On définit les applications S et T de $\mathcal{C}$ dans E par :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{C}, S(x) = z, \quad \text{où} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, z_n = x_{-n} \\ \text{et} \quad \forall x \in \mathcal{C}, T(x) = y, \quad \text{où} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, y_n = x_{n-1} + x_{n+1} \end{aligned}$$

3. Donner un exemple de suite non constante, élément de $\mathcal{C}$.
4. Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E .
5. Prouver que si une suite x est dans $\mathcal{C}$, elle est bornée.
6. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{C}$. On admettra qu'il en est de même de S .
7. Soient $F = \{x \in \mathcal{C}, \forall n \in \mathbb{Z}, x_n = x_{-n}\}$ et $G = \{x \in \mathcal{C}, \forall n \in \mathbb{Z}, x_n = -x_{-n}\}$.
Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}$.
8. Étude de l'endomorphisme S
Prouver que S est une symétrie de $\mathcal{C}$ dont on précisera les éléments caractéristiques.
9. Étude de l'endomorphisme T
On rappelle qu'une suite x est dans $\mathcal{C}$ lorsque les deux sous-suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes.
 - a) Soit λ un réel. Montrer que si $\lambda \notin \{-2, 2\}$, $\text{Ker}(T - \lambda \text{id}_{\mathcal{C}}) = \{0_{\mathcal{C}}\}$ où $0_{\mathcal{C}}$ désigne le vecteur nul de $\mathcal{C}$.
On pourra utiliser les questions de cours.
 - b) L'endomorphisme T est-il injectif ?
 - c) Déterminer $\text{Ker}(T - 2 \text{id}_{\mathcal{C}})$ et $\text{Ker}(T + 2 \text{id}_{\mathcal{C}})$.
 - d) Déterminer alors l'ensemble de toutes les valeurs propres de l'endomorphisme T .
10. On munit $\mathcal{C}$ de la norme infinie : si $x \in \mathcal{C}$, $\|x\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|$.
Soit N l'application qui, à tout élément x de $\mathcal{C}$, associe $N(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n}$.
 - a) Vérifier que, pour tout x de $\mathcal{C}$, $N(x)$ existe.
 - b) Démontrer que l'on définit ainsi une norme sur l'espace $\mathcal{C}$.
 - c) Montrer que S est une isométrie de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}, N)$. Est-elle continue ?
 - d) Prouver que, dans cet espace normé, les sous-espaces vectoriels F et G sont des fermés.
 - e) Les deux normes $\|\cdot\|_{\infty}$ et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 19 (d'après E3A 2022 MP)

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ dont la norme est notée $\|\cdot\|$.

1. Questions de cours

- a) Soient x et y deux vecteurs de E . Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.
On pourra utiliser la fonction $t \mapsto \|x + ty\|^2$.
- b) Démontrer qu'on a l'égalité $|\langle x | y \rangle| = \|x\| \|y\|$ si, et seulement si, les vecteurs x et y sont colinéaires.
- c) On considère $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique et du produit scalaire canonique $\langle X | Y \rangle = X^T Y$.

Écrire cette inégalité pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Pour toute la suite de l'exercice, on identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Partie 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $B = \{X \in \mathbb{R}^n, \|X\| \leq 1\}$.

On considère l'application F de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad F(X) = \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} x_i x_j$$

Par exemple, pour $n = 3$:

$$F(X) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_1 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_3x_2 = 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

2. Exprimer alors $F(X)$ à l'aide de $S_1(n) = \sum_{i=1}^n x_i$ et de $S_2(n) = \sum_{i=1}^n x_i^2$.
3. Montrer que F possède un maximum sur B que l'on notera M .
4. Montrer en utilisant la question 1. que $M = n - 1$.
5. Déterminer tous les $X \in B$ tels que $F(X) = M$.

Partie 2

- On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique orthonormale pour le produit scalaire $\langle X | Y \rangle = X^\top Y$ de $\mathbb{R}^n$.

- Pour tout couple de vecteurs (X, Y) de $\mathbb{R}^n$ décomposés dans la base $\mathcal{B}$: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

$$\text{on pose : } \varphi(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} (x_i y_j + x_j y_i).$$

- Par exemple, pour $n = 3$, on a $\varphi(X, Y) = x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2$.
6. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ exprimer $F(X)$ à l'aide de φ .
 7. écrire la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ par $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$.
 8. Justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{U} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ constituée de vecteurs propres de la matrice A .
 9. Vérifier que pour tout couple de vecteurs (X, Y) de $(\mathbb{R}^n)^2$, on a $\varphi(X, Y) = Y^\top A X = X^\top A Y$.
 10. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1 .
 - a) Déterminer les valeurs propres de la matrice J .
 - b) En déduire une matrice diagonale Δ semblable à la matrice A .
 11. Donner l'expression de $\varphi(X, Y)$ en fonction des coordonnées de X et Y dans la base $\mathcal{U}$.
 12. Retrouver alors le résultat établi à la question 4.

Exercice 20 (d'après CCINP 2023 - MPI-1)

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.

Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note :

$$N(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

1. Démontrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie, par :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

On note S la sphère unité définie par : $S = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \|X\|_\infty = 1\}$.

2. Démontrer :

$$\forall X \in S, \forall A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|AX\|_\infty \leq N(A)$$

En déduire, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'existence de $\sup_{X \in S} \|AX\|_\infty$.

On pose alors, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\| = \sup_{X \in S} \|AX\|_\infty$.

3. Démontrer :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \forall A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|AX\|_\infty \leq \|A\| \|X\|_\infty$$

4. Démontrer :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|A\| = N(A)$$

5. **Application.** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $\|A\|$.

Exercice 21 (*d'après CCINP 2012 - MP-1*)

- On note E l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur l'intervalle $[0;1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- On pose pour $f \in E$:

$$\|f\| = |f(0)| + 2 \int_0^1 |f'(t)| dt \quad \text{et} \quad \|f\|' = 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt$$

1. Démontrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur E .

De même, $\|\cdot\|'$ est une norme sur E , il est inutile de le démontrer.

2. a) Donner la définition de deux normes équivalentes.

b) Démontrer que les deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes sur E .

3. Toutes les normes sur E sont-elles équivalentes à la norme $\|\cdot\|$?

Exercice 22 (*d'après CCINP 2020 - MP-1*)

- On note T l'ensemble des suites réelles $t = (t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, t_n \in \{0, 1, 2\}$$

- On désigne par ℓ^∞ l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ bornées et on pose $\|u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} (|u_n|)$.

- On note $\lfloor y \rfloor$ la partie entière d'un réel y .

1. Démontrer que ℓ^∞ est un espace vectoriel réel et que $u \mapsto \|u\|$ est une norme sur ℓ^∞ .

2. Pour $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$, montrer que la série de terme général $\frac{u_n}{3^n}$ est convergente.

On note alors :

$$\sigma(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n}$$

3. Démontrer que l'application σ est une forme linéaire continue sur ℓ^∞ .

Exercice 23 (d'après Centrale 2021 - MP2)

Dans la suite, on note :

× on note $L^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues et intégrables sur $\mathbb{R}$;

× pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on note $\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$;

× on note $L^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues et bornées sur $\mathbb{R}$;

× pour $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

On admet que $L^1(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ ($k \in \mathbb{N}$) sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^\mathbb{R}$. On admet également que $f \mapsto \|f\|_1$ définit une norme sur $L^1(\mathbb{R})$ et que $f \mapsto \|f\|_\infty$ définit une norme sur $L^\infty(\mathbb{R})$.

On dispose ainsi des espaces vectoriels normés $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ et $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier de f et on note $\hat{f}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

1. Montrer que, pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'application $f \mapsto \hat{f}$ est linéaire continue de l'espace vectoriel normé $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ dans l'espace vectoriel normé $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.
3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(\lambda x)$$

Montrer que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et, pour tout réel ξ , exprimer $\hat{g}(\xi)$ à l'aide de $\hat{f}$, de ξ et de λ .

Exercice 24 (d'après Centrale 2017 - PSI-2) Notations

- On identifie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}^n$.
- $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ représente l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- $\text{tr}(M)$ est la trace de la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n .
- $0_{1,n}$ est la matrice ligne de taille n dont tous les coefficients sont nuls.

- Pour tout $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, on pose $\|Y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i|$.

- Pour toute matrice $C = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\|C\|_0 = \max_{1 \leq i,j \leq n} |c_{i,j}|$.

On rappelle que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{C}^n$ et que $\|\cdot\|_0$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Si $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ sont deux matrices colonnes de taille 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$, on note $[A, B]$ la matrice $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Préliminaire

1. Une suite $(z_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite périodique s'il existe un entier $p \geq 1$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, z_{k+p} = z_k$$

L'entier p est alors une période de la suite (z_k) qui est dite p -périodique.

a) Vérifier qu'une suite périodique est bornée.

b) Que peut-on dire des suites 1-périodiques ?

c) Vérifier que, si (z_k) est p -périodique, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, z_{n+kp} = z_n$.

d) Que peut-on dire des suites qui sont à la fois périodiques et convergentes ?

2. Vérifier les deux propriétés suivantes.

a) $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, \|AB\|_0 \leq n \|A\|_0 \times \|B\|_0$.

b) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall Y \in \mathbb{C}^n, \|AY\|_\infty \leq n \|A\|_0 \times \|Y\|_\infty$.

Exercice 25

• Soit $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ une $\mathbb{K}$ -algèbre, c'est-à-dire $(\mathcal{A}, +, \times)$ est un anneau et $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, tel que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in \mathcal{A}^2, (\alpha \cdot x) \times y = x \times (\alpha \cdot y) = \alpha \cdot (x \times y)$$

où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

• Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{A}$, $\|\cdot\|$ est appelée une norme sous-multiplicative de la $\mathbb{K}$ -algèbre $\mathcal{A}$, si :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{A}^2, \|x \times y\| \leq \|x\| \|y\|$$

• Dans tout le problème n et p désignent des entiers naturels non nuls.

• On rappelle que, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ ayant n lignes et p colonnes.

• Si $n = p$, alors $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on rappelle aussi que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, muni de ses opérations usuelles, est une $\mathbb{K}$ -algèbre.

• Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $A^0 = I_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}, A^{n+1} = AA^n$, où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ désigne le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Étude de quelques normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

On définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la norme notée $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|A\|_\infty = \max_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq n}} (|a_{i,j}|)$$

1. Montrer : $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \|AB\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$.

2. Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) On pose $(E_i^j)_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq n}}$, la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $X = (x_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer : $N(X) \leq \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq n}} N(E_i^j) \right) \|X\|_\infty$.

- b) (i)* Montrer que N est une fonction continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ vers $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue.
- (ii)* On pose $S_\infty = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \|X\|_\infty = 1\}$.
Montrer qu'il existe $X_0 \in S_\infty$ tel que : $\forall X \in S_\infty, N(X_0) \leq N(X)$.
- (iii)* En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \alpha \|X\|_\infty \leq N(X)$.
- c)* En déduire que toutes les normes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont équivalentes.

3. Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

- a)* Montrer qu'il existe un réel strictement positif β tel que

$$N(AB) \leq n \beta \|A\|_\infty \|B\|_\infty$$

- b)* Montrer qu'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que

$$N(AB) \leq n \frac{\beta}{\alpha^2} N(A) N(B)$$

- c)* En déduire qu'il existe un réel strictement positif γ tel que γN soit une norme sousmultiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

4. Soit N une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose :

$$\|A\| = \sup \left\{ \frac{N(AX)}{N(X)} \mid X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\} \right\}$$

- a) (i)* Justifier, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'existence de $\|A\|$.

- (ii)* Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\|A\| = \sup \{N(AX) \mid X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), N(X) = 1\}$$

- (iii)* Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- b) (i)* Montrer : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), N(AX) \leq \|A\| N(X)$.

- (ii)* En déduire : $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Suites de matrices

On rappelle que si $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et si A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la suite $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers A si la suite réelle $\left(\|A_m - A\|\right)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, où $\|\cdot\|$ est une norme donnée sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on écrit dans ce cas $\lim_{m \rightarrow +\infty} A_m = A$.

5. Soit $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on pose pour tout $m \in \mathbb{N}$, $A_m = \left(a_{i,j}^{(m)}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq p}}$, et $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq p}}$.

6. Montrer que la suite $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers A si, et seulement si, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, la suite $\left(a_{i,j}^{(m)}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers $a_{i,j}$.

En cas de convergence, on écrit $\lim_{m \rightarrow +\infty} A_m = \left(\lim_{m \rightarrow +\infty} a_{i,j}^{(m)}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq p}}$.

7. Soit α un réel, on pose pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $A_m = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{m} \\ \frac{\alpha}{m} & 1 \end{pmatrix}$.

- a)* Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe $C_m \in \mathbb{R}$ et $\theta_m \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tels que :

$$A_m = C_m \begin{pmatrix} \cos(\theta_m) & -\sin(\theta_m) \\ \sin(\theta_m) & \cos(\theta_m) \end{pmatrix}$$

b) Déterminer $\lim_{m \rightarrow +\infty} A_m^m$.

Séries de matrices

Soit $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On pose pour $m \in \mathbb{N}$, $S_m = \sum_{k=0}^m A_k$. On dit que la série de terme général A_m converge si la suite $(S_m)_{m \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles converge, sinon la série est dite divergente. En cas de convergence, la limite de la suite $(S_m)_{m \in \mathbb{N}}$ se note $\sum_{k=0}^{+\infty} A_k$.

On dit que la série de terme général A_m est absolument convergente, si la série numérique de terme général $N(A_m)$ converge, avec N une norme définie sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

8. Soit $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on pose pour tout $m \in \mathbb{N}$, $A_m = (a_{i,j}^{(m)})_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq p}}$.

Montrer que la série de terme général A_m converge si, et seulement si, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, la série de terme général $a_{i,j}^{(m)}$ converge.

En cas de convergence, on écrit $\sum_{m=0}^{+\infty} A_m = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{i,j}^{(m)} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq p}}$.

9. Montrer que toute série absolument convergente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est convergente.

10. Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\sum_{m \in \mathbb{N}} A^m$ converge.

Montrer que $\sum_{m=0}^{+\infty} A^m$ est inversible et déterminer son inverse.

11. On pose $B = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{5}{6} \\ \frac{5}{3} & -\frac{7}{6} \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $\sum_{m \in \mathbb{N}} B^m$ est convergente et déterminer sa valeur.

b) En déduire l'inverse de $\sum_{m=0}^{+\infty} B^m$.

Exponentielle d'une matrice

12. Montrer que, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série de terme général $\frac{1}{m!} A^m$, $m \in \mathbb{N}$, est convergente.

Par la suite, on appelle l'exponentielle d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice notée $\exp(A)$, telle que

$$\exp(A) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} A^m.$$

Dans toute la suite du problème, on note $\exp$ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

13. Soit S une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $S^2 = I_n$.

Déterminer $\exp(S)$ en fonction de I_n et de S .

14. a) Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ tel que $AB = BA$.

Montrer que $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$.

b) En déduire que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\exp(A)$ est une matrice inversible et déterminer son inverse en fonction de A .

15. On note, pour tout $(\beta_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$, $\text{Diag}(\beta_i)_{1 \leq i \leq n}$, la matrice diagonale $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq n}}$, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{i,i} = \beta_i$.

a) Montrer : $\forall (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$, $\exp(\text{Diag}(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}) = \text{Diag}(e^{\alpha_i})_{1 \leq i \leq n}$.

b) Montrer : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall P \in \text{GL}_n(\mathbb{K}), \exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$.

c) Soit $T = (t_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure.

Montrer : $\exp(T) = (t'_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq n}}$ est aussi une matrice triangulaire supérieure telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$t'_{i,i} = e^{t_{i,i}}.$$

d) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer : $\det(\exp(A)) = e^{\text{tr}(A)}$, où $\text{tr}(A)$ désigne la trace de la matrice A .

e) Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ -10 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, pour tout réel t , déterminer $\exp(tA)$.

Exercice 26

- Dans ce problème, n désigne un entier naturel ≥ 2 . Le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ se notera $\langle, \rangle$ et la norme associée sera notée $\| \cdot \|$; il est défini par $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = {}^t y x$.
- On considère une application continue $A : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \langle A(t) x, x \rangle = {}^t x A(t) x \geq 0$$

- On note Σ_A l'ensemble des applications $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ deux fois dérivables et vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, F''(t) = A(t)F(t) \quad (1)$$

Structure de l'ensemble Σ_A

On considère l'application $B : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}), t \mapsto B(t) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A(t) & 0 \end{pmatrix}$

L'application B est continue puisque l'application A l'est aussi. On note alors Σ_B l'espace vectoriel réel des solutions sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation différentielle :

$$x' = B(t) x \quad (2)$$

Si $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une application deux fois dérivable, on lui associe l'application $x_F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, x_F(t) = \begin{pmatrix} F(t) \\ F'(t) \end{pmatrix}$$

- Vérifier que Σ_A est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
- Détermination de la dimension de Σ_A
 - Soit $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une application deux fois dérivable.
Montrer que $F \in \Sigma_A$ si, et seulement si, $x_F \in \Sigma_B$.
 - Montrer que l'application $\Phi : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_B, F \mapsto x_F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels réels.
 - En déduire la dimension de l'espace vectoriel réel Σ_A .
- Montrer que, pour tout triplet $(s, u, w) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe une unique application F , élément de Σ_A , telle que $F(s) = u$ et $F'(s) = w$.

Quelques propriétés des solutions de l'équation différentielle (1)

- Soit $F \in \Sigma_A$; on lui associe l'application $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \geq 0, f(t) = \|f'(t)\|^2$$

- a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et exprimer sa dérivée seconde.
- b) En déduire que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}_+$.
5. On conserve les hypothèses et les notations de la question 2.1. précédente ; on suppose de plus qu'il existe un couple $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leq t_1 < t_2$ et $F(t_1) = F(t_2) = 0$.
- a) Montrer que, pour tout $t \in [t_1, t_2]$, $f(t) = 0$.
- b) Montrer que la fonction F est nulle.
6. Une famille de solutions non bornées de (1)
- Soit $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on note F_v l'élément de Σ_A tel que $F_v(0) = F'_v(0) = v$.
- Montrer que si $v \neq 0$ alors la fonction $t \mapsto \|F_v(t)\|$ admet une limite infinie en $+\infty$.
7. Des normes sur Σ_A
- Soit b un réel strictement positif.
- a) Montrer que l'application $\Psi : \Sigma_A \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $F \mapsto (F(0), F(b))$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels réels.
- b) Montrer que l'application $\|\cdot\|_b : F \mapsto \|f(0)\| + \|F(b)\|$ est une norme sur Σ_A .
- c) Montrer également que l'application $\|\cdot\|_{\infty,b} : F \mapsto \sup_{0 < t < b} \|F(t)\|$ est une norme sur Σ_A .
- d) Justifier que les normes $\|\cdot\|_{\infty,b}$ et $\|\cdot\|_b$, sur Σ_A , sont équivalentes.

Exercice 27 (d'après Mines 2023 - MP1)

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E .

Si u et v sont deux applications linéaires pour lesquelles la notation $u \circ v$ a un sens, alors on note uv l'application $u \circ v$. De plus, si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E et $k \in \mathbb{N}^*$, u^k désigne l'application $u \circ \dots \circ u$, où u apparaît k fois dans l'écriture. Par convention $u^0 = \text{id}_E$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E .

1. Après avoir justifié l'existence des bornes supérieures, montrer :

$$\sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0_E}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|u(x)\|$$

2. On note : $\|u\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0_E}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$.

Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(E)$.

3. Montrer qu'il s'agit d'une norme sous-multiplicative, c'est-à-dire :

$$\forall (u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2, \|uv\| \leq \|u\| \times \|v\|$$

et en déduire une majoration de $\|u^k\|$, pour tout entier naturel k , en fonction de $\|u\|$ et de l'entier k .

Exercice 28 (d'après CCINP 2015 - MP-1)

- Toutes les fonctions étudiées dans ce problème sont à valeurs réelles. On pourra identifier un polynôme et la fonction polynomiale associée.
- On rappelle le théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[a, b]$: si f est une fonction continue sur $[a, b]$, il existe une suite de fonctions polynômes (P_n) qui converge uniformément vers la fonction f sur $[a, b]$.
- Le problème aborde un certain nombre de situations en lien avec ce théorème qui sera démontré dans la dernière partie.

Partie 1. Exemples et contre-exemples

1. On considère la fonction $h : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0, 1]$.

Expliquer pourquoi h ne peut être uniformément approchée sur l'intervalle $]0, 1]$ par une suite de fonctions polynômes. Analyser ce résultat par rapport au théorème de Weierstrass.

2. Soit N entier naturel non nul, on note $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $[a, b]$, de degré inférieur ou égal à N . Justifier que $\mathcal{P}_n$ est une partie fermée de l'espace des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme.

Que peut-on dire d'une fonction qui est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de polynômes de degré inférieur ou égal à un entier donné ?

3. Cette question illustre la dépendance d'une limite vis-à-vis de la norme choisie.

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

Soient N_1 et N_2 deux applications définies sur $\mathbb{R}[X]$ ainsi :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], N_1(P) = \sup_{x \in [-2, -1]} |P(x)| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sup_{x \in [1, 2]} |P(x)|$$

- a) Vérifier que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

On admettra que N_2 en est également une.

- b) On note f la fonction définie sur l'intervalle $[-2, 2]$ ainsi :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ x^3 & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2, 2]$ et justifier l'existence d'une suite de fonctions polynômes (P_n) qui converge uniformément vers la fonction f sur $[-2, 2]$.

Démontrer que cette suite de polynômes (P_n) converge dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_1 vers X^2 et étudier sa convergence dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_2 .

Exercice 29 (d'après CCINP 2014 - PSI-1)

- On rappelle que l'application

$$f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$$

définit une norme sur l'espace $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

- On note $E_1 = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continûment dérivables de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et pour toute fonction $f \in E_1$, on note

$$\|f\| = |f(0)| + \|f'\|_\infty$$

1. Comparaison des normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$

- a) Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|$ définit une norme sur E_1 .

- b) Montrer :

$$\forall f \in E_1, \|f\|_\infty \leq \|f\|$$

- c) Les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes sur E_1 ?

2. On désigne par $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $[0, 1]$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1], f_n(t) = \frac{\sin(n\pi t)}{\sqrt{n}}$$

- a) Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.

- b) On désigne, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, par $I_n = L(f_n)$ la longueur de la courbe représentative de f_n . Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \geq \sqrt{n} \frac{\pi}{2}$$

- c) L'application $L : f \mapsto L(f)$ est-elle continue sur $(E_1, \|\cdot\|_\infty)$?

- d) L'application $L : f \mapsto L(f)$ est-elle continue sur $(E_1, \|\cdot\|)$?

Exercice 30 (d'après CCINP 2014 - PC-1)

Norme subordonnée et mesure de Lozinskiï

- Soit n un entier naturel non nul. Dans toute cette partie, on note $\|\cdot\|$ une certaine norme sur le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.
On définit l'ensemble : $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } \|x\| = 1\}$.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit : $\|A\| = \sup_{x \in \mathcal{B}} (\|Ax\|)$ (l'existence de cette borne supérieure sera établie dans la question II.1.c).
- **On admet que** l'application $A \mapsto \|A\|$ définit ainsi une norme $\|\cdot\|$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui s'appelle la norme subordonnée à $\|\cdot\|$: en effet, elle dépend du choix de la norme $\|\cdot\|$.

1. a) Rappeler la définition d'une norme sur $\mathbb{K}^n$.

- b) Vérifier que l'application $x \mapsto \|Ax\|$ est continue sur $\mathbb{K}^n$.

- c) Montrer l'existence de $x_0 \in \mathcal{B}$ tel que : $\forall x \in \mathcal{B}, \|Ax\| \leq \|Ax_0\|$.

Cela justifie donc la définition de $\|A\| = \sup_{x \in \mathcal{B}} (\|Ax\|)$ et on a alors $\|A\| = \|Ax_0\|$.

- d) Montrer que $\|I_n\| = 1$.

- e) Établir que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$.

- f) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\|A\| - \|B\| \leq \|A - B\| \quad \text{et} \quad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

2. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a : $\operatorname{Re}(\lambda) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{\|1 + u\lambda\| - 1}{u} \right)$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On se propose dans cette question de montrer l'existence du réel :

$$\mu(A) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{\|I_n + uA\| - 1}{u} \right)$$

Ce réel est appelé mesure de Lozinskiï de A (il dépend du choix de la norme initiale). Pour $u > 0$,

$$\text{on note } \mu(A, u) = \frac{\|I_n + uA\| - 1}{u}.$$

- a) Montrer que pour tout u et v éléments de $\mathbb{R}_+^*$:

$$\mu(A, u) - \mu(A, v) = \|u^{-1}I_n + A\| - \|v^{-1}I_n + A\| - (u^{-1} - v^{-1})$$

- b) En déduire que si $0 < u \leq v$, alors $\mu(A, u) - \mu(A, v) \leq 0$.

- c) Vérifier que pour tout $u > 0$, on a : $-\|A\| \leq \mu(A, u) \leq \|A\|$.

- d) En déduire l'existence du réel $\mu(A) = \lim_{u \rightarrow 0^+} (\mu(A, u))$.

4. On suppose dans cette question que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

- a) Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $Ax = \lambda x$, $\|x\| = 1$ et puis que, pour tout réel u strictement positif, on a : $\|((I_n + uA)x)\| = |1 + u\lambda|$.

- b) En déduire que $\operatorname{Re}(\lambda) \leq \mu(A)$.

- c) Donner une condition suffisante sur $\mu(A)$ pour que A soit stable.

Exercice 31

Étudier la convergence de la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ lorsque l'espace $\mathbb{R}[X]$ est muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par :

$$a. \|P\| = \int_0^1 |P(t)| dt. \quad b. \left\| \sum_{k=0}^n a_k X^k \right\| = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|.$$

Exercice 32

Étudier la continuité de l'évaluation $\varphi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto P(0)$, lorsque :

$$a. \text{ l'espace } \mathbb{R}[X] \text{ est muni de la norme } \|\cdot\| \text{ définie par } \|P\| = \int_0^1 |P(t)| dt.$$

b. l'espace $\mathbb{R}[X]$ est muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par :

$$\left\| \sum_{k=0}^n a_k X^k \right\| = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|$$

Exercice 33 (d'après EPITA 2024)

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, son coefficient en ligne i et colonne j sera noté $(A)_{i,j}$ ou $A_{i,j}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par : $\|A\|_\infty = \max_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} |A_{i,j}|$.

On définit pour tout entier naturel k le polynôme : $E_k(X) = \sum_{p=0}^k \frac{1}{p!} X^p$.

On définit l'exponentielle d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ comme étant, lorsqu'elle existe, la limite de la suite $\left(\sum_{p=0}^k \frac{1}{p!} A^p \right)_{k \in \mathbb{N}}$.

5. Démontrer : $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, \|AB\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$.

6. Démontrer par récurrence : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall p \in \mathbb{N}^*, \|A^p\|_\infty \leq n^{p-1} \|A\|_\infty^p$.

7. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $(E_k(A))_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$$8. \text{ Soit } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \text{ et soit } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}. \text{ Démontrer : } e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

9. Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ et soit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que : $A = P B P^{-1}$. Démontrer : $e^A = P e^B P^{-1}$.

10. En reprenant la matrice A de la partie I, déterminer e^A .

11. Soit A et soit B deux matrices qui commutent.

$$\text{On pose, pour tout } N \in \mathbb{N} : \Delta_N = \left(\sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} A^i \right) \left(\sum_{j=0}^N \frac{1}{j!} B^j \right) - \sum_{k=0}^N \frac{(A+B)^k}{k!}.$$

$$\text{Démontrer que, pour tout } N \in \mathbb{N} : \Delta_N = \sum_{k=N+1}^{2N} \sum_{\substack{i+j=k \\ 0 \leq i \leq N \\ 0 \leq j \leq N}} \frac{1}{i!} \frac{1}{j!} A^i B^j \text{ et en déduire : } e^{A+B} = e^A e^B.$$

12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En déduire que e^A est inversible et déterminer son inverse.