Colles

semaine 24 : 25 mars - 31 mars

Autres exercices

Exercice 1

E et F désignent deux espaces vectoriels normés.

1. Soient f une application de E dans F et a un point de E .

On considère les propositions suivantes :

P1 f est continue en a .

P2 Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$.

Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.

2. Soit A une partie dense dans E , et soient f et g deux applications continues de E dans F .

Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

Exercice 2

Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F , alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalents :

P1 f est continue sur E

P2 f est continue en 0_E

P3 $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k \|x\|_E$.

2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|. \text{ On considère l'application } \varphi \text{ de } E \text{ dans } \mathbb{R} \text{ définie par : } \varphi(f) = \int_0^1 f(t) dt.$$

Démontrer que φ est linéaire et continue.

Exercice 3

Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.

2. On pose : $\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, \|u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

a) Démontrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E .

b) Démontrer : $\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, \sum \frac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.

c) On pose : $\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$.

Démontrer que f est continue sur E .

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel normé.

Soient A et B deux parties non vides de E .

1. a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.

b) Montrer : $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

2. Démontrer : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Indication : il n'est pas obligatoire d'utiliser la caractérisation séquentielle de l'adhérence

3. a) Montrer : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

Exercice 5

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. On pose : $\forall f \in E, N_\infty(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$.

1. a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E .

b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de $E, N_1(f) \leq k N_\infty(f)$.

c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞ .

2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Exercice 6

Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé E .

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A , en termes de boules.

2. Démontrer : $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$.

3. Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E , alors $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel de E .

4. Démontrer que si A est convexe alors $\overline{A}$ est convexe.

Exercice 7

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé.

1. Démontrer que le complémentaire d'une partie ouverte de E est une partie fermée de E .

2. Démontrer que le complémentaire d'une partie fermée de E est une partie ouverte de E .

Exercice 8

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé.

Soient A et B deux parties de E .

1. On suppose $A \subset B$.

a) Démontrer : $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

b) Démontrer : $\overline{A} \subset \overline{B}$.

2. a) Démontrer : $A \overset{\circ}{\cap} B = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

b) Démontrer : $A \overset{\circ}{\cup} B \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ et qu'il n'y a pas forcément égalité.

3. a) Comparer : $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$.

b) Comparer : $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$.

Exercice 9

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé.

Soient A une partie de E .

On note $\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap \overline{C_E A}$.

1. Montrer : $\text{Fr}(A) = \{x \in E \mid \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ et } B(x, \varepsilon) \cap C_E A \neq \emptyset\}$
2. Montrer : $\text{Fr}(A) = \text{Fr}(C_E A)$.
3. Montrer : A fermé $\Leftrightarrow \text{Fr}(A) \subset A$.
4. Montrer : A ouvert $\Leftrightarrow \text{Fr}(A) \cap A = \emptyset$.
5. Montrer : A fermé $\Rightarrow \text{Fr}(\text{Fr}(A)) = \text{Fr}(A)$.

Exercice 10

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé.

Soit $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire non identiquement nulle.

Le but de l'exercice est de démontrer que Φ est continue si et seulement si son noyau est fermé.

1. **Préambule.** On considère F un fermé de E .
 - a) Soit $u \in E$.
Démontrer que $y + F = \{y + x \mid x \in F\}$ est un fermé de E .
 - b) Soit $u \notin F$.
Démontrer qu'il existe $r > 0$ tel que : $B_f(u, r) \cap F = \emptyset$.
2. Démontrer le sens direct.
3. Réciproquement, on suppose que le noyau de Φ , noté H , est fermé.
On fixe $y \in E$ tel que $\Phi(y) = 1$.
 - a) Démontrer que $\Phi^{-1}(\{1\})$ est fermé.
 - b) En déduire qu'il existe $r > 0$ tel que $B_f(0_E, r) \cap \Phi^{-1}(\{1\}) = \emptyset$.
 - c) Démontrer : $x \in B_f(0, r) \Rightarrow |\Phi(x)| \leq 1$.
 - d) Conclure.
(Indication : pour $x \in E$, considérer le vecteur $\frac{r \cdot x}{\|x\|}$)