Colles

semaine 4 : 16 septembre - 21 septembre

I. Questions de cours

Exercice 1

1. Démontrer que l'ensemble $\{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) + P(2) = 0)\}$ est un espace vectoriel.

2. Déterminer la nature de la série $\sum \left(\cos\left(\dfrac{\mathrm{e}}{2\,n\,\sqrt{n}}\right) - 1 \right)$.

Exercice 2

1. Démontrer que l'ensemble $\left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2\,u_n\right\}$ est un espace vectoriel.

2. Déterminer la nature de la série $\sum \sin\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 3

1. Démontrer que l'ensemble $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\right\}$ est un espace vectoriel.

2. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{n^4}{\mathrm{e}^n}$.

II. Autres exercices

Exercice 4

Pour chacune des séries suivantes, justifier la convergence de la série et calculer sa somme.

a. $\sum \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2n+1}$

b. $\sum n \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2n+1}$

c. $\sum \dfrac{n^2}{2^n}$

d. $\sum \dfrac{n^2 + 2^n}{n!}$

e. $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$

f. $\sum \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$

g. $\sum \dfrac{n(n+3)}{3^{n+2}}$

h. $\sum \ln\left(\dfrac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right)$

i. $\sum \dfrac{2n^2 - n + 1}{n!}$

Exercice 5

Déterminer la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

a. $\sum \dfrac{\ln(n)}{3^n}$

b. $\sum \dfrac{((-1)^n + i)\ \ln(n)\ \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+3} - 1}$

c. $\sum (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{3^n}$

d. $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$

e. $\sum \dfrac{\sqrt{n!}}{(n+2)!}$

f. $\sum \dfrac{n^3}{\mathrm{e}^{n+1}}$

g. $\sum \ln(1 + n\,\mathrm{e}^{-n})$

h. $\sum \dfrac{\sqrt{n}\,\ln(n)}{n^2 + 1}$

i. $\sum \dfrac{\sqrt{n}\,\ln(n)}{n + 1}$

Exercice 6
Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.
On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \ln\left(1 + {u_n}^k\right)$.

1) Supposons que la série $\sum\ u_n$ converge
   - ***a.*** Que peut-on dire de la suite (u_n) ?
   - ***b.*** Démontrer alors qu'il existe un rang n_0 tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ 0 \leqslant u_n^k \leqslant u_n$.
   - ***c.*** En déduire alors la nature de la série $\sum\ v_n$.

2) On se propose d'étudier la réciproque de l'implication précédente.
   - ***a.*** On suppose que $k = 1$. Montrer que si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.
   - ***b.*** On suppose que $k > 1$. Donner un exemple de suite (u_n) telle que la série $\sum\ v_n$ converge et la série $\sum\ u_n$ diverge.

Exercice 7

a. Démontrer : $\forall n \geqslant 2,\ n\ \ln(n) - n\ \leqslant\ \ln(n!)\ \leqslant\ (n+1)\ \ln(n+1) - (n+1)$.

b. En déduire un équivalent simple de $\ln(n!)$.

c. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n!)}{n^3}$ est-elle convergente ?

Exercice 8

1) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[\,,\ f(x) = x + \mathrm{e}^x$$

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + \mathrm{e}^x = n$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$, notée u_n. Préciser la valeur de u_1.

3) ***a.*** Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
   - ***b.*** La suite (u_n) est-elle majorée ? En déduire la limite de (u_n).

4) ***a.*** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n - \ln(n) \leqslant \mathrm{e}^{u_n} \leqslant n$.
   - ***b.*** En déduire que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

5) On note $v_n = u_n - \ln(n)$.
   - ***a.*** Démontrer que : $\mathrm{e}^{v_n} = 1 - \dfrac{u_n}{n}$.
   - ***b.*** En déduire un équivalent simple de v_n.
   - ***c.*** Déterminer la nature des séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{v_n}{n}$.

Exercice 9

a. Démontrer que la fonction $F : x \mapsto x(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto (\ln(x))^2$ sur $]0, +\infty[$.

b. Démontrer que : $\forall k \geqslant 2,\ \displaystyle\int_{k-1}^{k} (\ln(t))^2\ dt\ \leqslant\ (\ln(k))^2\ \leqslant\ \int_{k}^{k+1} (\ln(t))^2\ dt$.

c. Soit $n \geqslant 2$. Déduire de la question précédente un encadrement de $v_n = \sum\limits_{k=2}^{n} (\ln(k))^2$.

d. En déduire un équivalent simple de la suite (v_n).

e. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\dfrac{v_n}{n^2}\right)^2$ est-elle convergente ?

Exercice 10
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $v_n = S_n - \ln(n)$.

1. Quelle est la limite de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

2. Montrer, pour tout $x > 0$:
$$\frac{1}{x+1} \ \leqslant\ \ln(x+1) - \ln(x) \ \leqslant\ \frac{1}{x}.$$

3. En déduire la monotonie de la suite (v_n).

4. Démontrer que la suite (v_n) est à termes positifs.

5. Conclure que la suite (v_n) est convergente. On note γ sa limite appelée la *constante d'Euler*.

6. En déduire : $S_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$ puis donner un équivalent de S_n.

Exercice 11
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note (E_n) l'équation :
$$x^3 + \frac{1}{n}\, x^2 + x - 2 \ =\ 0$$

1. Montrer qu'il existe un unique réel positif x_n qui soit solution de (E_n).

2. Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

3. Déterminer la nature de $\sum\ (1 - x_n)$.

Exercice 12

1. Démontrer, à l'aide d'un produit de Cauchy :
$$\forall (u,v) \in \mathbb{C},\ \mathrm{e}^{u+v} \ =\ \mathrm{e}^{u} \times \mathrm{e}^{v}$$

2. ***a)*** Sous quelle condition la série numérique $\sum\ z^n$ (où $z \in \mathbb{C}$) est-elle convergente ?

b) Démontrer, à l'aide d'un produit de Cauchy :
$$\forall |z| < 1,\ \frac{1}{(1-z)^2} \ =\ \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, z^n$$

c) Quel résultat plus général cet exerccie semble-t-il illustrer ?

Exercice 13
On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 \in\ ]0, \pi/2[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$$

1. Établir la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.

2. ***a)*** Démontrer : $\sin(u_n) - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6}\, u_n^3$.

b) En déduire la nature de la série $\sum\ u_n^3$.

3. En considérant la suite $\left(\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \right)$ démontrer que la série $\sum\ u_n^2$ diverge.

4. Pour $p \in \mathbb{N}$, déterminer la nature de la série $\sum\ {u_n}^p$.

Exercice 14

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On admet qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que : $\lim_{n \to +\infty} H_n - \ln(n) = \gamma$.

1. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = H_n - H_{2n}$.

En déduire que $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ converge et déterminer sa somme.

2. Dans cette question, on suppose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{3n+1} = a_{3n+2} = 1 \qquad \text{et} \qquad a_{3n+3} = -1$$

Déterminer la nature de la série $\sum \frac{a_k}{k}$.

3. On suppose maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{4n+1} = a_{4n+2} = 1 \qquad \text{et} \qquad a_{4n+3} = a_{4n+4} = -1$$

a) Démontrer, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+3} \right) = \int_0^1 \frac{1 - x^{4N+4}}{1 + x^2} \, dx$$

b) En déduire : $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+3} \right) = \frac{\pi}{4}$.

c) En déduire que la série $\sum \frac{a_n}{n}$ converge et que sa somme vaut $\frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$.

Exercice 15

On pose $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Établir la convergence de (u_n) et déterminer sa limite.

2. ***a)*** Déterminer un équivalent de $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$.

b) En déduire la nature de la série $\sum \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \right)$.

Puis montrer que la suite $\left(\frac{1}{u_n^2} \right)$ diverge vers $+\infty$.

3. ***a)*** *Moyenne de Césaro.*

Soit (v_n) une suite réelles. Supposons que la suite (v_n) converge vers 0.

Démontrer alors que la suite $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} v_k \right)$ converge vers 0.

b) En utilisant la question ***2.a)*** et la question précédente, en déduire : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$.

Exercice 16

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum \dfrac{1}{a_n}$ converge.

Le but de cet exercice est de démontrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{n}{a_1 + \ldots + a_n}$ converge également et que, de plus :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$$

1. **Étude d'un exemple**

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = n\,(n+1)$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier : $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, puis en déduire que la série $\sum \dfrac{1}{a_n}$ converge et donner sa somme.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer u_n en fonction de n.

c) Établir la convergence de la série $\sum u_n$ et donner sa somme puis établir l'inégalité demandée.

2. **Étude d'un deuxième exemple**

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = n!$.

a) Établir la convergence de la série $\sum \dfrac{1}{a_n}$.

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}$.

c) En déduire que la série $\sum u_n$ converge et établir l'inégalité demandée.

On revient maintenant au cas général.

3. Montrer, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \big(1 + \ldots + n\big)^2 \leqslant (a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \ldots + \frac{n^2}{a_n}\right)$$

4. *a)* Utiliser le résultat précédent pour établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{2n+1}{a_1 + \ldots + a_n} \leqslant 4\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}$$

b) En déduire, par sommation : $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1 + \ldots + a_n} \leqslant 4 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k}$.

c) Montrer enfin que la série $\sum \dfrac{2n+1}{a_1 + \ldots + a_n}$ converge puis établir le résultat demandé.

Exercice 17

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto nx^3 + n^2x - 2$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n possède une unique racine réelle que l'on note u_n.

2. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et la convergence de la série de terme général u_n^{α} en fonction de α.

Exercice 18
On considère la fonction φ définie sur $]-\infty, 1]$ par :

$$\forall x \in\,]-\infty,1], \quad \varphi(x) = \begin{cases} x + (1-x)\ln(1-x) & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Partie A : Étude de la fonction φ

1. Montrer que la fonction φ est continue sur $]-\infty, 1]$.

2. ***a)*** Justifier que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ et calculer, pour tout $x \in\,]-\infty, 1[$, $\varphi'(x)$.

b) En déduire les variations de φ sur $]-\infty, 1]$.

c) La fonction φ est-elle dérivable en 1 ?

3. Calculer la limite de φ en $-\infty$.

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de φ en soignant le tracé aux voisinages de 0 et 1.

5. ***a)*** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\,\ln(t)\,dt$ converge et calculer sa valeur.

b) En déduire : $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \frac{1}{4}$.

Partie B : Étude de deux séries

Soit x un réel appartenant à $[0, 1[$.

6. ***a)*** Vérifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout t de $[0, x]$: $\displaystyle\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{t^n}{1-t}$.

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle -\ln(1-x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$.

7. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leqslant \frac{1}{(n+1)(1-x)}$.

En déduire la limite de $\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

8. Montrer alors que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et que l'on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

9. ***a)*** Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.

b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge et que l'on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \varphi(x)$.

10. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et que l'on a encore : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \varphi(1)$.

Exercice 19

1. Quelle est la nature des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n+1}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(n+1)^2}$?

2. On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle.
Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k, \quad v_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k, \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$

a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante, et que la suite (v_n) est croissante.

b) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n \leqslant u_n$.
En déduire que la suite (u_n) admet une limite s et que la suite (v_n) admet la même limite s.

c) En déduire que la suite (s_n) converge vers s.

3. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n$ est convergente.

4. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente. On note $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$ sa somme.

5. *a)* Établir, pour tout réel t positif et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$$

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt$$

c) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

d) En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$.

Exercice 20

On considère la série $\sum u_n$ dont le terme général est défini par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \end{cases}$

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge, et qu'elle ne converge pas absolument.

2. Soit $\sum w_n$ le produit de Cauchy de la série $\sum u_n$ avec elle-même.

a. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$: $w_n = (-1)^n \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$.

b. Justifier : $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ 0 < k(n-k) \leqslant \dfrac{n^2}{4}$.
En déduire que le produit de Cauchy $\sum w_n$ diverge grossièrement.

3. Ce résultat est-il en contradiction avec le théorème de convergence des produits de Cauchy ?

Exercice 21

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$b_n = n(a_n - a_{n+1}),\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ \text{ et } \ B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = A_n - na_{n+1}$.

2. On prend **dans cette question**, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = q^{n-1}$, où $q \in\ ]-1, 1[$.

a) Vérifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge et déterminer sa somme.

b) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\,q^{n-1}$ converge et a pour somme $\dfrac{1}{(1-q)^2}$.

Indication : on pourra utiliser un produit de Cauchy, ou une autre méthode de son choix.

c) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ converge et calculer sa somme.

3. On prend **dans cette question**, $a_1 = 0$ et $a_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$ si $n \geqslant 2$.

a) Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(a_n)_{n\geqslant 2}$.

b) À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} na_{n+1}$.

d) Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$?

4. On suppose **dans cette question** que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $na_{2n} \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{2n} a_k$.

b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} na_{2n} = 0$.

c) Démontrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$.

d) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ converge.

e) A-t-on $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$?

5. On suppose **dans cette question** que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et de limite nulle.

a) Vérifier que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \leqslant n$, on a $B_n \geqslant A_m - ma_{n+1}$.

b) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

c) Peut-on en déduire que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$?

Exercice 22

Soit a un nombre réel strictement positif.

On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont *tous* les termes sont strictement positifs, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$\left\{\begin{array}{lcl} w_n & = & \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \dfrac{a}{n} \\ \ell_n & = & \ln\left(n^a\, u_n\right) \end{array}\right.$$

On suppose que la série $\sum\ w_n$ est absolument convergente.

1. Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ est convergente.

2. Démontrer que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{w_n}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} (w_n)^2$ sont convergentes.

3. ***a)*** Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $\ell_{n+1} - \ell_n \ = \ f\left(w_n - \dfrac{a}{n}\right) + w_n + a\, f\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

b) En déduire la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (\ell_{n+1} - \ell_n)$.

4. ***a)*** Justifier la convergence de la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) En déduire l'existence d'un réel $A > 0$ tel que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{n^a}$.

5. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{2 \times 4 \times \ldots \times (2n)}{1 \times 3 \times \ldots \times (2n+1)}$.

Exercice 23

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On considère la série $\sum\ \dfrac{1}{n\ \big(\ \ln(n)\ \big)^{\alpha}}$.

On note u_n le terme général de la série précédente.

1. ***a)*** Cas $\alpha \leqslant 0$.

En utilisant une minoration simple de u_n, démontrer que la série $\sum\ u_n$ diverge.

b) Cas $\alpha > 0$.

Étudier la nature de la série $\sum\ u_n$.

Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $x \mapsto \dfrac{1}{x\ \big(\ \ln(x)\ \big)^{\alpha}}$

2. Déterminer la nature de la série $\sum\ \dfrac{\left(\mathrm{e} - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\ \right)\ \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\Big(\ln(n^2+n)\Big)^2}$.