Colles

semaine 5 : 23 septembre - 28 septembre

I. Questions de cours

Exercice 1
Déterminer la nature de la série $\sum \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 2

1. Démontrer que l'ensemble $\{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P'(1) = P(1)\}$ est un espace vectoriel.

2. En déterminer une base.

On traitera la question ***1.*** sans exhiber de famille génératrice.

Exercice 3
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2 \cdot X\}$.

II. Autres exercices

Exercice 4
Pour chacune des séries suivantes, justifier la convergence de la série et calculer sa somme.

a. $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1}$

b. $\sum n \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1}$

c. $\sum \frac{n^2}{2^n}$

d. $\sum \frac{n^2 + 2^n}{n!}$

e. $\sum \frac{1}{n(n+1)}$

f. $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

g. $\sum \frac{n(n+3)}{3^{n+2}}$

h. $\sum \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right)$

i. $\sum \frac{2n^2 - n + 1}{n!}$

Exercice 5
Déterminer la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

a. $\sum \frac{\ln(n)}{3^n}$

b. $\sum \frac{((-1)^n + i)\ \ln(n)\ \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+3} - 1}$

c. $\sum (-1)^n \frac{\ln(n)}{3^n}$

d. $\sum \frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$

e. $\sum \frac{\sqrt{n!}}{(n+2)!}$

f. $\sum \frac{n^3}{\mathrm{e}^{n+1}}$

g. $\sum \ln(1 + n\,\mathrm{e}^{-n})$

h. $\sum \frac{\sqrt{n}\ \ln(n)}{n^2 + 1}$

i. $\sum \frac{\sqrt{n}\ \ln(n)}{n + 1}$

Exercice 6
Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.
On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \ln\left(1 + {u_n}^k\right)$.

1) Supposons que la série $\sum\ u_n$ converge

- ***a.*** Que peut-on dire de la suite (u_n) ?
- ***b.*** Démontrer alors qu'il existe un rang n_0 tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ 0 \leqslant u_n^k \leqslant u_n$.
- ***c.*** En déduire alors la nature de la série $\sum\ v_n$.

2) On se propose d'étudier la réciproque de l'implication précédente.

- ***a.*** On suppose que $k = 1$. Montrer que si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.
- ***b.*** On suppose que $k > 1$. Donner un exemple de suite (u_n) telle que la série $\sum\ v_n$ converge et la série $\sum\ u_n$ diverge.

Exercice 7

1. Démontrer, à l'aide d'un produit de Cauchy :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{C},\ \mathrm{e}^{u+v} \ = \ \mathrm{e}^u \times \mathrm{e}^v$$

2. ***a)*** Sous quelle condition la série numérique $\sum\ z^n$ (où $z \in \mathbb{C}$) est-elle convergente ?

b) Démontrer, à l'aide d'un produit de Cauchy :

$$\forall |z| < 1,\ \frac{1}{(1-z)^2} \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, z^n$$

c) Quel résultat plus général cet exerccie semble-t-il illustrer ?

Exercice 8
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On admet qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que : $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n - \ln(n) = \gamma$.

1. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = H_n - H_{2n}$. En déduire que $\sum\ \frac{(-1)^k}{k}$ converge et déterminer sa somme.

2. Dans cette question, on suppose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{3n+1} \ = \ a_{3n+2} \ = \ 1 \qquad \text{et} \qquad a_{3n+3} \ = \ -1$$

Déterminer la nature de la série $\sum\ \frac{a_k}{k}$.

3. On suppose maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{4n+1} \ = \ a_{4n+2} \ = \ 1 \qquad \text{et} \qquad a_{4n+3} \ = \ a_{4n+4} \ = \ -1$$

a) Démontrer, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+3} \right) \ = \ \int_0^1 \frac{1 - x^{4N+4}}{1+x^2}\, dx$$

b) En déduire : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+3} \right) = \frac{\pi}{4}$.

c) En déduire que la série $\sum\ \frac{a_n}{n}$ converge et que sa somme vaut $\frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$.

Exercice 9
On pose $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Établir la convergence de (u_n) et déterminer sa limite.

2. ***a)*** Déterminer un équivalent de $\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$.

b) En déduire la nature de la série $\sum \left(\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}\right)$ puis montrer que $\left(\dfrac{1}{u_n^2}\right)$ diverge vers $+\infty$.

3. ***a)*** *Moyenne de Césaro.*
Soit (v_n) une suite réelles. Supposons que la suite (v_n) converge vers 0.
Démontrer alors que la suite $\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k\right)$ converge vers 0.

b) En utilisant la question ***2.a)*** et la question précédente, en déduire : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{3}{n}}$.

Exercice 10
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$b_n = n(a_n - a_{n+1}),\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ \text{ et } \ B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = A_n - na_{n+1}$.

2. On prend **dans cette question**, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = q^{n-1}$, où $q \in]-1, 1[$.

a) Vérifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge et déterminer sa somme.

b) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\, q^{n-1}$ converge et a pour somme $\dfrac{1}{(1-q)^2}$.
Indication : on pourra utiliser un produit de Cauchy, ou une autre méthode de son choix.

c) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ converge et calculer sa somme.

3. On prend **dans cette question**, $a_1 = 0$ et $a_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$ si $n \geqslant 2$.

a) Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(a_n)_{n\geqslant 2}$.

b) À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} na_{n+1}$.

d) Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$?

4. On suppose **dans cette question** que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $na_{2n} \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{2n} a_k$.

b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} na_{2n} = 0$.

c) Démontrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$.

d) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ converge.

e) A-t-on $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$?

5. On suppose **dans cette question** que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et de limite nulle.

a) Vérifier que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \leqslant n$, on a $B_n \geqslant A_m - m a_{n+1}$.

b) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

c) Peut-on en déduire que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$?

Exercice 11

Soit a un nombre réel strictement positif.

On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont *tous* les termes sont strictement positifs, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$\begin{cases} w_n &= \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \dfrac{a}{n} \\ \ell_n &= \ln\left(n^a\, u_n\right) \end{cases}$$

On suppose que la série $\sum w_n$ est absolument convergente.

1. Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ est convergente.

2. Démontrer que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{w_n}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} (w_n)^2$ sont convergentes.

3. ***a)*** Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $\ell_{n+1} - \ell_n \;=\; f\left(w_n - \dfrac{a}{n}\right) + w_n + a\, f\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

b) En déduire la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (\ell_{n+1} - \ell_n)$.

4. ***a)*** Justifier la convergence de la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) En déduire l'existence d'un réel $A > 0$ tel que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{n^a}$.

5. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{2 \times 4 \times \ldots \times (2n)}{1 \times 3 \times \ldots \times (2n+1)}$.

Exercice 12

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On considère la série $\sum \dfrac{1}{n\,\big(\ln(n)\big)^\alpha}$.

On note u_n le terme général de la série précédente.

1. ***a)*** Cas $\alpha \leqslant 0$.

En utilisant une minoration simple de u_n, démontrer que la série $\sum u_n$ diverge.

b) Cas $\alpha > 0$.

Étudier la nature de la série $\sum u_n$.

Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $x \mapsto \dfrac{1}{x\,\big(\ln(x)\big)^\alpha}$

2. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{\left(\mathrm{e} - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right) \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\Big(\ln(n^2+n)\Big)^2}$.

Exercice 13

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum \dfrac{1}{a_n}$ converge.

Le but de cet exercice est de démontrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{n}{a_1 + \ldots + a_n}$ converge également et que, de plus : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_n}$.

1. **Étude d'un exemple**

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = n\,(n+1)$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier : $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, puis en déduire que la série $\sum \dfrac{1}{a_n}$ converge et donner sa somme.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer u_n en fonction de n.

c) Établir la convergence de la série $\sum u_n$ et donner sa somme puis établir l'inégalité demandée.

2. **Étude d'un deuxième exemple**

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = n!$.

a) Établir la convergence de la série $\sum \dfrac{1}{a_n}$.

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}$.

c) En déduire que la série $\sum u_n$ converge et établir l'inégalité demandée.

On revient maintenant au cas général.

3. Montrer, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \big(1 + \ldots + n\big)^2 \leqslant \big(a_1 + \ldots + a_n\big) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \ldots + \frac{n^2}{a_n}\right)$$

4. ***a)*** Établir alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{2n+1}{a_1 + \ldots + a_n} \leqslant 4 \left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right) \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{a_k}$.

b) En déduire, par sommation : $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{2n+1}{a_1 + \ldots + a_n} \leqslant 4 \sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{1}{a_k}$.

c) Montrer enfin que la série $\sum \dfrac{2n+1}{a_1 + \ldots + a_n}$ converge puis établir le résultat demandé.

Exercice 14
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in]0, \pi/2[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$$

1. Établir la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.

2. ***a)*** Démontrer : $\sin(u_n) - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{6}\, u_n^3$.

b) En déduire la nature de la série $\sum u_n^3$.

3. En considérant la suite $\left(\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right)$ démontrer que la série $\sum u_n^2$ diverge.

4. Pour $p \in \mathbb{N}$, déterminer la nature de la série $\sum u_n^p$.

Exercice 15
Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $A^2 = 0$, et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Montrer que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$, et préciser la dimension de ces deux sous-espaces.

2. Montrer que A est semblable à la matrice élémentaire $E_{1,2}$.

3. Pour toute matrice $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on note : $C_B = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MB\}$.

a) Soit $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que C_B est un espace vectoriel.

b) Déterminer $C_{E_{1,2}}$.

c) En déduire la dimension de C_A.

Exercice 16
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère deux endomorphismes f et g de E vérifiant :

× $\text{rg}(f) \geqslant 2$,

× pour tout $x \in E$, la famille $(f(x), g(x))$ est liée.

Le but est de montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{K}$ tel que : $f = \gamma \cdot g$.

1. ***a)*** Justifier qu'il existe G, sous-espace vectoriel de E tel que : $E = G \oplus \text{Ker}(g)$.

b) Justifier que la restriction de g à G (notée $g_{|G}$ est une application injective.
On rappelle que $g_{|G}$ est l'application linéaire définie par :

$$g_{|G} : \begin{array}{ccc} G & \to & E \\ x & \mapsto & g(x) \end{array}$$

2. On considère $(u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n)$ une base adaptée à la décomposition précédente où $r = \dim(G)$.

a) On définit la famille $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ par :

$$\forall i \in [\![1, r]\!], e_i = u_i \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![r+1, n]\!], e_i = u_i + u_2$$

Démontrer que $\mathscr{B}$ est une base de E.

b) Démontrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la famille $\big(g(e_1), g(e_i)\big)$ est libre.

3. ***a)*** Démontrer précisément que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $\gamma_i \in \mathbb{K}$ tel que : $f(e_i) = \gamma_i\, g(e_i)$.

b) Que faut-il démontrer pour conclure ?

c) Conclure.
On pourra s'inspirer du point précédent et considérer le vecteur $e_1 + e_i$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$

Exercice 17
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Monrer que pour tout vecteur $x \neq 0_E$ de E, il existe une forme linéaire φ sur E telle que $\varphi(x) = 1$.

2. ***a)*** Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$. Montrer que l'application :

$$\theta \; : \; \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{K}^n \\ x & \mapsto & \big(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)\big) \end{array}$$

est un isomorphisme.

b) En déduire l'existence d'une base $\big(e_i\big)_{i \in \llbracket 1,n \rrbracket}$ de E telle que : $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \; \varphi_j(e_i) = \delta_{i,j}$.

3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient f_1, ..., f_p des formes linéaires de E.
On note $F = \text{Vect}\,(f_1, \dots, f_p)$ et $q = \dim(F)$.
On considère alors une forme linéaire g qui vérifie :

$$\forall x \in E, \; \Big(f_1(x) = \ldots = f_p(x) = 0\Big) \; \Rightarrow \; \Big(g(x) = 0\Big)$$

Démontrer : $g \in F$.

Exercice 18
On note $E = \mathbb{K}[X]$ et on considère l'endomorphisme φ de E défini par :

$$\varphi(P) = P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(1 - \frac{X}{2}\right) - 2P(X)$$

1. ***a)*** Déterminer le degré de $\varphi(P)$ en fonction du degré du polynôme P.

b) Déterminer $\text{Ker}(\varphi)$.

2. On pose $Q_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n = \varphi(X^n)$.

a) Montrer que la famille $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de E.

b) Montrer que $\text{Im}(\varphi)$ est un hyperplan de E.

3. On considère la forme linéaire θ sur E définie par $\theta(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\ dt$.

Montrer : $\text{Im}(\varphi) = \text{Ker}(\theta)$.

Exercice 19
On note $F = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a\,x\}$.
Démontrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 20
On considère :
- × $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.
- × F l'ensemble des fonctions constantes sur $[0, 1]$.
- × $G = \left\{ g \in E \mid \displaystyle\int_0^1 g(t)\ dt = 0 \right\}$.

Démontrer que F et G sont deux supplémentaires de E.

Exercice 21

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E.

1. Démontrer : $\big(H \cap F\big) + \big(H \cap G\big) \subset H \cap \big(F + G\big)$.

2. Le résultat précédent est-il toujours une égalité ?

Exercice 22

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On note : $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0\}$ et $e = (1, \dots, 1)$.

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. En donner une base.

2. Montrer que H et $\operatorname{Vect}(e)$ sont supplémentaires.

3. Plus généralement, montrer que si a est un vecteur de $\mathbb{K}^n$ n'appartenant pas à H, alors a et $\operatorname{Vect}(a)$ sont supplémentaires.

Oraux HEC

Exercice avec préparation 1

1. Question de cours : Définition et représentation graphique de la fonction partie entière.
On note E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par les quatre fonctions f_0, f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = \mathrm{e}^x,\ f_3(x) = x\mathrm{e}^x.$$

2. On note : $\mathscr{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$.

a) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de F.

b) Montrer que toutes les fonctions de F sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

3. Soit Φ l'application définie par : pour tout $f \in F$, $\Phi(f) = f'$, où f' est la dérivée de f.

a) Justifier que Φ est un endomorphisme de F et écrire la matrice M de Φ dans la base $\mathscr{B}$.

b) L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

c) Montrer que f_3 appartient à $\operatorname{Im}(\Phi)$ et résoudre dans F l'équation : $\Phi(f) = f_3$.

4. On note G l'ensemble des fonctions g de E telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x+1) - g(x) = 0$$

a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E et trouver $F \cap G$.

b) Trouver un élément de G qui n'appartienne pas à F.

5. Trouver toutes les fonctions de F vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) - f(x) = (\mathrm{e} - 1)\, f'(x)$.

Exercice avec préparation 2

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2. On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on note D et T les deux applications suivantes :

$$D : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & ad - bc \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad T : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & a + d \end{array} \right.$$

2. Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Exprimer $D(AB)$ en fonction de $D(A)$ et $D(B)$. Montrer que $T(AB) = T(BA)$.

b) En déduire que si A et B sont semblables, on a $D(A) = D(B)$ et $T(A) = T(B)$.

3. Déterminer $\mathrm{Ker}(D)$ et $\mathrm{Ker}(T)$. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(T)$?
Dorénavant, si $u \in \mathscr{L}(E)$ de matrice A dans une base $\mathscr{B}$ de E, on note :

$$D(u) = D(A) \quad \text{et} \quad T(u) = T(A)$$

4. On note id_E l'endomorphisme identité de E. Exprimer $u^2 = u \circ u$ en fonction de u et id_E.

5. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathcal{S}_0 = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid u \circ v - v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E)}\}$.
Montrer que $\mathcal{S}_0$ est un espace vectoriel contenant $\{P(u) \mid P \in \mathbb{R}[X]\}$.

6. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ avec $u \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. On pose : $\mathcal{S} = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid u \circ v - v \circ u = u\}$.

a) Montrer que si $\mathcal{S}$ est non vide, alors l'endomorphisme u ne peut être bijectif.
En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur u^2 pour que $\mathcal{S}$ soit non vide.

b) On suppose que $\mathcal{S}$ est non vide. Établir l'existence d'une base $\mathscr{B}_1 = (e_1, e_2)$ de E dans laquelle la matrice M_u de u d'écrit $M_u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et déterminer la forme générale de la matrice des éléments v de $\mathcal{S}$ dans cette même base.

c) On suppose que $\mathcal{S}$ est non vide. Montrer que $\mathcal{S} = \{v_0 + \alpha \mathrm{id}_E + \beta u, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ où v_0 est un endomorphisme non inversible de E à déterminer.

Exercice avec préparation 3

1. Question de cours : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I.
Propriétés de l'application $x \in I \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$.
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.
Pour tout fonction $f \in E$, on note $T(f)$ l'application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)\, dt.$$

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, soit f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = \mathrm{e}^{ax}$. Déterminer $T(f_a)$.

3. **a)** Montrer que pour toute fonction $f \in E$, l'application $T(f)$ appartient à E et est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer la fonction dérivée de la fonction $T(f)$.

b) On suppose que f est une fonction bornée de E. Montrer que $T(f)$ est bornée et établir l'existence d'un réel K tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|T(f)(x) - T(f)(y)| \leqslant K|x - y|$.

4. Soit T l'application de E dans E qui à $f \in E$, associe $T(f)$.

a) Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il surjectif ?

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Montrer que $T(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

c) Soit T_n la restriction à $\mathbb{R}_n[X]$ de l'endomorphisme T et $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. L'endomorphisme T_n est-il diagonalisable ? T_n est-il bijectif ?

Exercice avec préparation 4

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

1. Question de cours
Que peut-on dire du degré de la somme et du produit de deux polynômes ?

Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et f l'application qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, fait correspondre le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) \ = \ n\,X\,P(X) + X(1-X)P'(X), \text{ où } P' \text{ désigne la dérivée du polynôme } P$$

2. ***a)*** Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) L'endomorphisme f est-il bijectif ? Quel est son rang ?

c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note H_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $H_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$.

a) Calculer pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f(H_k)(X)$.

b) Montrer que $\mathscr{B} = (H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Trouver les coordonnées du polynôme $(X+1)^n$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice avec préparation 5

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles à n lignes et n colonnes.
Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ la transposée de M.

1. ***a)*** Question de cours : théorème du rang.

b) Justifier que l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont la somme des coefficients est nulle est un espace vectoriel et préciser sa dimension.

2. Soit φ l'application qui à toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, associe la matrice $\varphi(M) = M + {}^tM$.
Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Dans cette question, et seulement dans cette question, on suppose que $n = 2$.
Pour tout $(i, j) \in [\![1, 2]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont nuls excepté celui de la $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.
On rappelle que la famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Écrire la matrice A de φ dans la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$.

b) Préciser le rang de φ.

c) Donner une base du noyau de φ.

4. On suppose désormais $n \geqslant 3$.

a) Déterminer $\varphi(\varphi(M))$, pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de l'endomorphisme φ ?

b) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Exercice avec préparation 6

1. Question de cours : Définition d'un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.
Si $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_p[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.
On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{R}_p[X]$, alors $P(A)$ désigne la matrice $a_0\, I_n + a_1\, A + \cdots + a_p\, A^p$.

2. Soit A et Q deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose que la matrice Q est inversible, d'inverse notée Q^{-1}.
Soit P un polynôme à coefficients réels. Expliciter $P\big(Q^{-1}AQ\big)$ en fonction de $P(A)$, Q et Q^{-1}.

3. ***a)*** Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts et soit φ l'application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, associe le n-uplet $\big(P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)\big)$.
Montrer que l'application φ est bijective.

b) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ n réels distincts non nuls et $T = (t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $t_{i,i} = \lambda_i$.
Établir l'existence d'un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\lambda_i\ P(\lambda_i) = 1$$

Que vaut $T \times P(T)$? Conclure.

4. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ soit égale à $P(A)$.

Exercice avec préparation 7

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
On définit l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.
On pose $H_0(X) = 1$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $H_k(X) = \dfrac{X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)}{k!}$.
On note $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.

2. ***a)*** Montrer que φ est un endomorphisme non bijectif de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Justifier que la famille $\mathscr{B}' = (H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Déterminer la matrice M' de φ dans la base $\mathscr{B}'$.

d) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

3. Dans cette question, p est un entier fixé supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, soit f_i l'application de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall Q \in \mathbb{R}_p[X]$, $f_i(Q) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \dbinom{i}{k} Q(k)$.

a) Justifier que pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, l'application f_i est linéaire.

b) Soit $(i, j) \in [\![0, p]\!]^2$. Établir la relation : $f_i(H_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

c) Soit a_0, a_1, …, a_p les réels vérifiant : $X^p = a_0 H_0 + a_1 H_1 + \cdots + a_p H_p$.
Déduire de la question précédente, la relation : $\forall i \in [\![0, p]\!]$, $a_i = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \dbinom{i}{k} k^p$.