Colles

semaine 6 : 30 septembre - 05 octobre

I. Questions de cours

Exercice 1

1. ***a)*** Démontrer que l'ensemble $\{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P''(1) - 2\,P(0) = 0\}$ est un espace vectoriel.

b) En déterminer une base.

2. Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \mathrm{e}\,k\,n}}$.

Exercice 2

1. Démontrer que $x \mapsto \displaystyle\int_{2\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,dt$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.

2. ***a)*** Démontrer que la famille $\big((X-3)(X+1), (X-2)(X+1), (X-3)(X-2)\big)$ est libre.

b) Que peut-on en déduire ?

Exercice 3

1. Démontrer que $x \mapsto \displaystyle\int_{1}^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,dt$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_{-1}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\}$.

II. Autres exercices

Exercice 4

1. Justifier que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_{x}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt$ est convergente.

On définit alors $f : x \mapsto \displaystyle\int_{x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ *sur l'intervalle* $]0, +\infty[$.

2. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

3. Calculer la limite de f en $+\infty$. Que vaut la limite de f en 0 ?

4. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $x \in\ ]0, 1]$: $\left|\displaystyle\int_{x}^{1} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt + \ln(x)\right| \leqslant C$.

En déduire : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)$.

5. Démontrer : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

(indication : on pourra effectuer une IPP)

Exercice 5

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+n}\, dx$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est une intégrale convergente.

2. Établir : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

3. Établir la convergence et donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x}\, dx$.

4. Former un développement asymptotique de I_n à la précision $\underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Préciser f'.

2. Etudier les variations de f.

3. ***a)*** Montrer que, pour tout $x > 0$: $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\, dt$.

Encadrer cette dernière intégrale et en déduire que : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

b) Montrer que, pour tout $x > 0$: $\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt + \ln(x) = \int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t}\, dt$.

En déduire que : $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x)$.

c) Dresser le tableau de variations de f.

4. ***a)*** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge et calculer sa valeur.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, f(t)\, dt$ converge.

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de I_n.

Exercice 7

1. Déterminer les réels x pour lesquels $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^x}$ converge.

On note alors $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^x}$.

2. Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En évaluant $F(n) - F(n+1)$, déterminer à l'aide d'une intégration par parties, une relation de récurrence entre $F(n)$ et $F(n+1)$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $F(-n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1}$.

5. Étudier les variations de la fonction F sur son domaine de définition.

6. ***a)*** Pour $x < 0$ fixé, étudier les variations de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^x}$ sur $[0,1]$.

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x)$.

7. ***a)*** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{xt^2}{2}}\, dt$.

b) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

Exercice 8

1. Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t^3}\, dt$ ***b)*** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\ln(1+t) - t}\, dt$ ***c)*** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\ e^t - t^2\ ln(t)\ e^{-t}}{t^3\ e^{2t} - 1}\, dt$

2. ***a)*** Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\, dx$ (on pourra penser au changement de variable $u = \sqrt{x}$).

b) Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\, dx$ en posant le changement de variable $u = \sqrt{1+e^x}$.

3. On considère la fonction définie sur $]-\infty, +\infty[$ par $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{-x}^{x^2} \ln(1+t^2)\, dt$.

Démontrer que φ est $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.

Exercice 9

On pose pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_0(x) = 1 - e^{-x}$ et $J_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^x t^n e^{-t}\, dt$.

1. Calculer pour tout réel $x > 0$, $J_1(x)$.

2. Établir pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation : $J_n(x) = J_{n-1}(x) - \dfrac{1}{n!}x^n e^{-x}$.

3. En déduire pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $J_n(x)$ sous forme de somme.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$ est convergente et calculer sa valeur.

5. On note : $I_n = \displaystyle\int_0^1 e^{n(x+\ln(1-x))} dx$.

À l'aide du changement de variable $t = n(1-x)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_n = n!\frac{e^n}{n^{n+1}}\ J_n(n)$$

Exercice 10

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$.

1. Justifier la convergence de $J_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$. En déduire la convergence de I_1.

2. On pose, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, $J_n(a) = \displaystyle\int_0^a x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$.

Trouver une relation de récurrence entre $J_n(a)$ et $J_{n-2}(a)$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n converge et trouver une relation de récurrence liant I_n à I_{n-2}.

3. Calculer I_n, pour tout n impair.

En admettant que $I_0 = \sqrt{2\pi}$, calculer I_n, pour tout n pair.

Exercice 11

On considère la fonction numérique F définie par : $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4+t^4}}\, dt$

1. Déterminer le domaine de définition de F et montrer que F est une fonction impaire.

2. Établir, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $\dfrac{x}{\sqrt{4+16x^4}} \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{4+x^4}}$.

En déduire la limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. Justifier la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.

Exercice 12

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\, dx$.

1. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'intgérale I_n est convergente.

2. Pour tout $n \geqslant 1$, déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} I_k$. Montrer que :

$$\forall n \geqslant 1,\ S_n = \frac{1}{2} - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3\ (1+x^3)^n}\, dx$$

4. En déduire la nature de la série de terme général I_n, et sa somme en cas de convergence.

Exercice 13. *Interversion Limite/Intégrale ?*

Soit la suite de fonctions (f_n) définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = 2nx\mathrm{e}^{-nx^2}$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\, dt$.

1. Calculer pour tout $t \in [0,1]$ la limite de $f_n(t)$ lorsque n tend vers l'infini.

2. Calculer I_n. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$?

3. A-t-on l'égalité suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\, dt = \int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\, dt$?

Exercice 14

On note $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)\, dx$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que I_n est convergente. Calculer I_n en fonction de n.

2) En déduire que (I_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 15

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\, dx$.

1. Calculer I_0, puis trouver une relation entre I_n et I_{n+1}.

2. En déduire I_n en fonction de n.

Exercice 16

On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln(x)}{1-x}\, dx$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n \ln(x)}{1-x}\, dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 x^n \ln(x)\, dx$$

1. Montrer que l'intégrale I est convergente.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est convergente.

3. Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$, $-1 \leqslant \dfrac{x\ln(x)}{1-x} \leqslant 0$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{n} \leqslant I_n \leqslant 0$, puis la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Montrer que l'intégrale J_n est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$, et calculer sa valeur.

5. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} J_k$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I = -\sum\limits_{k=2}^{n+1} \dfrac{1}{k^2} + I_{n+1}$.

Exercice 17

1. Soit f la fonction définie par $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1-t}$.

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$ converge.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in]0,1[$:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k \ln(t) + \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t}$$

c) Montrer que la fonction $g : t \mapsto \dfrac{t\ln(t)}{1-t}$ définie sur $]0,1[$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$.

d) En déduire une expression de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\ dt$ sous la forme d'une série de Riemann.

2. Pour tout $x \in]-\infty, 1]$, on pose : $L(x) = -\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\ dt$.

a) Montrer que la fonction L est bien définie sur $]-\infty,1]$.

b) Exprimer $L(1)$ à l'aide d'un résultat précédent.

3. *a)* Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $L(x) = -\ln(1-x)\ln(x) + L(1) - L(1-x)$.

b) Déterminer la valeur de $L\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

4. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $L(x) + L(-x) = \dfrac{1}{2}\ L(x^2)$.

Exercice 18

Soit f une fonction définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de classe C^∞ sur $[0,1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\ dx$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge, puis déterminer sa limite.

2. On suppose que $f(1) \neq 0$. Trouver un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

3. On suppose que $f(1) = 0$. Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

4. Soit h une fonction continue sur $[0,1]$.

a) En utilisant la continuité de h au point 1, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n\int_0^1 x^n\big(h(x)-h(1)\big)dx\right) = 0$$

b) En déduire que la suite $\left(n\displaystyle\int_0^1 x^n h(x)\ dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et exprimer sa limite à l'aide de la fonction h.

Exercice 19 (ECRICOME 2020)
Pour tout entier naturel non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \geqslant 0,\ f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt$$

Partie A : Étude de la fonction f_n

Dans cette partie, on fixe un entier naturel n non nul.

1. Démontrer que la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \geqslant 0,\ f_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}$$

2. Étudier les variations de f_n.

3. Démontrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et calculer sa dérivée seconde.
En déduire que f_n est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

4. ***a)*** Démontrer : $\forall t \geqslant 1,\ t^{2n}-1 \ \geqslant\ n\,(t^2-1)$.

b) Montrer alors : $\forall x \geqslant 1,\ f_n(x) \ \geqslant\ f_n(1) + \dfrac{n}{2}\,(x-1)^2$.

c) En déduire la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. Calculer $f_n(0)$, puis démontrer : $f_n(1) < 0$.

6. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, et que cette solution est strictement supérieure à 1.
On note x_n cette solution.

Partie B : Étude d'une suite implicite

On étudie dans cette partie le comportement de la suite (x_n), où pour tout entier naturel n non nul, x_n est l'unique solution strictement positive de l'équation : $f_n(x) = 0$.
On admettra :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \geqslant \frac{2n+2}{2n+1}$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) \ =\ x^{2n+1}\ \left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

8. ***a)*** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \geqslant \dfrac{2n+2}{2n+1},\ f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x_n) \geqslant 0$.

c) Montrer alors que la suite (x_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.

9. ***a)*** Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$: $-\ln(2) \leqslant f_n(1) \leqslant 0$.

b) À l'aide de l'inégalité démontrée à la question ***4.b)*** de la partie ***A***, montrer alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant x_n - 1 \leqslant \sqrt{\frac{2\ln(2)}{n}}$$

Quelle est la limite de x_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 20 (EML S 2014)
On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues, E_1 le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On remarquera que E_1 est inclus dans E.
On note, pour tout élément f de E, $T(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$T(f)(x) \;=\; \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$$

Partie I : Propriétés générales de T

1. Établir que, pour tout élément f de E, $T(f)$ appartient à E_1 et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\big(T(f)\big)'(x) \;=\; \frac{1}{2}\big(f(x+1) - f(x-1)\big)$$

On note $T : E \to E$ l'application qui, à f, associe $T(f)$.

2. Montrer que T est un endomorphisme de E.

3. Est-ce que T est surjectif ?

4. Soit $f \in E$. Montrer que, si f est paire (respectivement impaire), alors $T(f)$ est paire (respectivement impaire).
À cet effet, on pourra utiliser le changement de variable $u = -t$ dans une intégrale.

5. Soit $f \in E$.

a) On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.
On introduit alors la fonction $R : x \mapsto \displaystyle\int_{x}^{+\infty} f(t)\,dt$. Montrer : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} R(x) = 0$.

b) Montrer que, si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, alors $T(f)(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.

Partie II : Un exemple

On note, pour tout $a \in \mathbb{R}$: $f_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_a(t) = \mathrm{e}^{at} \end{array}$

6. Calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $T(f_a)(x)$.
On note : $\varphi : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & \varphi(a) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{a} - \mathrm{e}^{-a}}{2a} & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{cases} \end{array}$

7. Établir : $\forall a \in \mathbb{R}$, $T(f_a) = \varphi(a)\, f_a$.

8. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
Calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\varphi'(a)$. *On admet que φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 0$.*
Étudier, selon $a \in \mathbb{R}$, le signe de $\mathrm{e}^{a}\,(a-1) + \mathrm{e}^{-a}\,(a+1)$.
En déduire les variations de φ et tracer l'allure de sa représentation graphique.

9. En déduire que, pour tout $\lambda \in [1, +\infty[$, il existe $f \in E \setminus \{0\}$ tel que : $T(f) = \lambda\, f$.

Exercice 21 (`EML S 2010`)
Dans tout le problème, J désigne l'intervalle $[-1, +\infty[$.
Le but du problème est l'étude de l'application f définie, pour tout x de J, par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\, dt$$

Préliminaires

1. Justifier la convergence des séries numériques suivantes : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

2. En admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

3. En déduire : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Partie I : Eléments d'étude de f.

4. Justifier, pour tout $x \in J$, la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\, dt$.

5. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

6. Montrer : $\forall x \in J, 0 \leqslant f(x) \leq \frac{1}{x+1}$, et en déduire : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

7. ***a)*** Montrer : $\forall (x,y) \in J^2,\ \forall t \in]0,1], (x \leqslant y \ \Rightarrow\ t^x \geqslant t^y)$.

b) En déduire que f est décroissante sur J.

8. Montrer : $\forall x \in J,\ f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}$.

9. Déduire des résultats précédents : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

10. Soit $x \in J$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = (-1)^{n+1}\ f(n+1+x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$.

b) En déduire que la série numérique $\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$ converge et que $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$.

11. ***a)*** Montrer : $\forall (x,y) \in J^2, \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \left|\frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y}\right| \leqslant |x-y|\,\frac{1}{k^2}$,

puis : $\forall (x,y) \in J^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant |x-y| \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{\pi^2}{6}\right)$.

b) En déduire que f est continue sur J.

12. Montrer : $f(x) \underset{x\to-1}{\sim} \frac{1}{x+1}$. En déduire la limite de f en -1.

Partie II : Dérivabilité de f

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, g_k l'application de classe $\mathscr{C}^2$ de J dans $\mathbb{R}$ définie pour tout x de J par :

$$g_k(x) = \frac{(-1)^k}{k+1+x}$$

13. Montrer : $\forall (x,y) \in J^2, \forall k \in \mathbb{N}^*,\ |g_k(x) - g_k(y) - (x-y)g_k'(x)| \leqslant \frac{|x-y|^2}{k^3}$.

14. ***a)*** Justifier la convergence des séries $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{k^3}$ et $\sum\limits_{k\geqslant 0} g_k'(x)$, pour tout $x \in J$.

b) En déduire que f est dérivable sur J et que : $\forall x \in J,\ f'(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}$.

c) Déterminer $f'(0)$.

15. Tracer l'allure de la courbe représentative de f. On donne la valeur approchée : $\ln(2) \approx 0,69$.

Exercice 22 (EML S 2017)

On définit la fonction réelle H d'une variable réelle x par : $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\, dt$.

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

PARTIE I : Premières propriétés de la fonction H

1. Justifier que la fonction H est définie sur I.

2. Montrer que H est décroissante sur I.

3. ***a)*** Calculer $H(1)$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, à l'aide dune intégration par parties : $H(n) = 2n(H(n) - H(n+1))$. En déduire une expression de $H(n+1)$ en fonction de n et de $H(n)$.

c) Écrire un programme **Scilab** qui, étant donné un entier n de $\mathbb{N}^*$, renvoie la valeur de $H(n)$.

d) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H(n) = \dfrac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}\Big((n-1)!\Big)^2}$.

PARTIE II : Étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$

4. ***a)*** Montrer que la fonction $\varphi : u \mapsto \dfrac{e^u - e^{-u}}{2}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Préciser $\varphi^{-1}(0)$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi^{-1}(t)$.

b) À l'aide du changement de variables $t = \varphi(u)$, montrer :

$$\forall x \in I, H(x) = \frac{4^x}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^u + e^{-u})^{2x-1}}\, du$$

5. ***a)*** Justifier : $\forall u \in [0, +\infty[,\ e^u \leqslant e^u + e^{-u} \leqslant 2e^u$.

b) En déduire : $\forall x \in I,\ \dfrac{1}{2x-1} \leqslant H(x) \leqslant \frac{4^x}{2(2x-1)}$.

6. Déterminer la limite de H en $\frac{1}{2}$ et un équivalent simple de $H(x)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$.

PARTIE III : Étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

7. ***a)*** Montrer : $\forall u \in [0, 1],\ \ln(1+u) \geqslant \dfrac{u}{2}$.

b) À l'aide d'une loi normale bien choisie, montrer que, pour tout x de I, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt^2/2}\, dt$ converge et donner sa valeur.

c) En déduire : $\forall x \in I,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^x}\, dt \leqslant \int_0^1 e^{-xt^2/2}\, dt \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.

d) Montrer : $\forall x \in I,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\, dt \leqslant \frac{1}{2x-1}$.

e) En déduire la limite de H en $+\infty$.

8. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln\big(H(n)\big) + \dfrac{\ln(n)}{2}$.

a) Déterminer un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.
On pourra utiliser le résultat obtenu à la question **3.b)**.

b) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (u_{n+1} - u_n)$ converge.

c) En déduire l'existence d'un réel K strictement positif tel que : $H(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n}}$.

9. Donner enfin un équivalent simple de $H(x)$ lorsque le réel x tend vers $+\infty$ à l'aide de K.

Exercice 23 (`EML S 2015`)
Dans tout le problème, on note E l'ensemble des fonctions $u\ :\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}^+$ et vérifiant :

$$\exists p \in \mathbb{N},\ \lim_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{t^p} = 0$$

On remarquera que l'entier p dépend a priori de la fonction u considérée.

PARTIE 1 : Définition de la transformée de Laplace.

1. Montrer que E est un sev de l'ev des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2. Soit u un élément de E. Montrer que pour tout $x \in\ ]0, +\infty[\ ,\ \lim\limits_{t\to+\infty} t^2\, u(t)\, \mathrm{e}^{-xt} = 0$.

En déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} u(t)\, \mathrm{e}^{-xt}\ dt$ est convergente.

Dans toute la suite du problème, pour toute fonction u de E, on définit la fonction $L(u)$ sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall\, x \in]0, +\infty[\ ,\ L(u)(x) = \int_0^{+\infty} u(t)\, \mathrm{e}^{-xt}\ dt$$

3. Montrer : $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ ,\ \forall (u, v) \in E^2\ ,\ L(\alpha\, u + v) = \alpha\, L(u) + L(v)$.

PARTIE 2 : Quelques exemples.

4. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé. On considère pour tout i dans $\{0, 1, 2\}$ la fonction $v_i\ :\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^+\ ,\ v_i(t) = t^i\, \mathrm{e}^{-at}$$

Pour tout i dans $\{0, 1, 2\}$, montrer que v_i appartient à E. En utilisant par exemple des résultats sur les lois exponentielles, calculer pour tout x de $]0, +\infty[$ la valeur de $L(v_i)(x)$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On considère la fonction $w_n\ :\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ w_n(t) = t^n$$

Montrer que la fonction w_n appartient à E.
Montrer pour tout x de $]0, +\infty[$ que $L(w_n)(x) = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

PARTIE 3 : Propriétés des transformées de Laplace.

6. **Limite de $L(u)$ en $+\infty$**
Soit $u \in E$. Justifier qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $A, M\ \in \mathbb{R}^+$ tels que :

$$\forall t \in [A, +\infty[, |u(t)| \leqslant t^p \quad \text{ et } \quad \forall t \in [0, A], |u(t)| \leqslant M$$

Établir : $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $|u(t)| \leqslant M + t^p$ et en déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} L(u)(x) = 0$.

7. **Limite de $L(u)$ en 0**

Soit u un élément de E tel que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(s)\ ds$ converge.

On note, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $R(t) = \displaystyle\int_t^{+\infty} u(s)\ ds$.

a) Déterminer la limite en $+\infty$ de R. Montrer que R appartient à E.

b) Montrer que R est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $R'(t) = -u(t)$.

c) En déduire : $\forall x \in]0, +\infty[$, $L(u)(x) = R(0) - xL(R)(x)$.

d) Soit $\epsilon \in]0, +\infty[$. Justifier qu'il existe $B \in [0, +\infty[$ tel que : $\forall t \in [B, +\infty[$, $|R(t)| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$.

En déduire : $\forall x \in]0, +\infty[$, $|L(u)(x) - R(0)| \leqslant x \displaystyle\int_0^B |R(t)|\ dt + \frac{\epsilon}{2}$.

e) Conclure : $\displaystyle\lim_{x\to 0} L(u)(x) = \int_0^{+\infty} u(t)\ dt$.

8. **Transformée de Laplace d'une dérivée**

Soit $u\ :\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ telle que $u' \in E$.

a) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $A \in [0, +\infty[$ tels que $\forall t \in [A, +\infty[, |u(t)| \leqslant |u(A)| + \dfrac{t^{p+1}}{p+1}$.

b) En déduire que u appartient à E.

c) Établir : $\forall x \in]0, +\infty[$, $L(u')(x) = -u(0) + xL(u)(x)$.

9. Dérivée puis dérivée n-ième d'une transformée de Laplace.

Soit u un élément de E. On considère pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, u_n(t) = t^n u(t)$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n appartient à E.

b) Montrer : $\forall a \in \mathbb{R}, |\mathrm{e}^a - 1 - a| \leqslant \dfrac{a^2}{2}\mathrm{e}^{|a|}$.

c) Soient $x \in]0, +\infty[$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tels que $|h| \leqslant \dfrac{x}{2}$.

Montrer : $\forall t \in [0, +\infty[$, $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{-(x+h)t} - \mathrm{e}^{-xt}}{h} + t\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant |h|\,\dfrac{t^2}{2}\exp(-xt/2)$.

En déduire : $\left|\dfrac{L(u)(x+h) - L(u)(x)}{h} + L(u_1)(x)\right| \leqslant \dfrac{|h|}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,|u(t)|\exp(-xt/2)\ dt$.

d) Montrer que $L(u)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer $(L(u))'$ en fonction de $L(u_1)$.

e) Montrer que $L(u)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\big(L(u)\big)^{(n)}$ en fonction de $L(u_n)$.

PARTIE 4 : Application à la résolution d'une équation fonctionnelle

Dans cette partie, on cherche à déterminer une fonction $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ et vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, u''(t) + 5u'(t) + 6u(t) = \mathrm{e}^{-t}\ ;\ u(0) = 1 \quad \text{et} \quad u'(0) = -2$$

10. On suppose qu'il existe une fonction u solution du problème et telle que $u'' \in E$.

a) Montrer que $u \in E$ et : $\forall x \in]0, +\infty[$, $L(u'')(x) = -xu(0) - u'(0) + x^2L(u)(x)$.

b) En déduire : $\forall x \in]0, +\infty[$, $(x^2 + 5x + 6)L(u)(x) = \dfrac{1}{x+1} + x + 3$,

puis : $\forall x \in]0, +\infty[$, $L(u)(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x+3}$.

11. En déduire une fonction u solution du système posé.

Exercice 24
Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $A^2 = 0$, et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$, et préciser la dimension de ces deux sous-espaces.

2. Montrer que A est semblable à la matrice élémentaire $E_{1,2}$.

3. Pour toute matrice $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on note : $C_B = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MB\}$.

   a) Soit $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que C_B est un espace vectoriel.

   b) Déterminer $C_{E_{1,2}}$.

   c) En déduire la dimension de C_A.

Exercice 25
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère deux endomorphismes f et g de E vérifiant :

× $\mathrm{rg}(f) \geqslant 2$,

× pour tout $x \in E$, la famille $(f(x), g(x))$ est liée.

Le but est de montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{K}$ tel que : $f = \gamma \cdot g$.

1. ***a)*** Justifier qu'il existe G, sous-espace vectoriel de E tel que : $E = G \oplus \mathrm{Ker}(g)$.

   b) Justifier que la restriction de g à G (notée $g_{|G}$ est une application injective.
   On rappelle que $g_{|G}$ est l'application linéaire définie par :

$$g_{|G} \ : \ \begin{array}{rcl} G & \to & E \\ x & \mapsto & g(x) \end{array}$$

2. On considère $(u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n)$ une base adaptée à la décomposition précédente où $r = \dim(G)$.

   a) On définit la famille $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ par :

$$\forall i \in [\![1, r]\!], e_i = u_i \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![r+1, n]\!], e_i = u_i + u_2$$

   Démontrer que $\mathscr{B}$ est une base de E.

   b) Démontrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la famille $\big(g(e_1), g(e_i)\big)$ est libre.

3. ***a)*** Démontrer précisément que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $\gamma_i \in \mathbb{K}$ tel que : $f(e_i) = \gamma_i \, g(e_i)$.

   b) Que faut-il démontrer pour conclure ?

   c) Conclure.
   On pourra s'inspirer du point précédent et considérer le vecteur $e_1 + e_i$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$

Exercice 26
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On note : $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0\}$ et $e = (1, \dots, 1)$.

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. En donner une base.

2. Montrer que H et $\mathrm{Vect}\,(e)$ sont supplémentaires.

3. Plus généralement, montrer que si a est un vecteur de $\mathbb{K}^n$ n'appartenant pas à H, alors a et $\mathrm{Vect}\,(a)$ sont supplémentaires.

Exercice 27
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Monrer que pour tout vecteur $x \neq 0_E$ de E, il existe une forme linéaire φ sur E telle que $\varphi(x) = 1$.

2. ***a)*** Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$. Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rcrcl} \theta & : & E & \to & \mathbb{K}^n \\ & & x & \mapsto & \big(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)\big) \end{array}$$

est un isomorphisme.

b) En déduire l'existence d'une base $\big(e_i\big)_{i \in [\![1,n]\!]}$ de E telle que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \varphi_j(e_i) = \delta_{i,j}$.

3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient f_1, ..., f_p des formes linéaires de E.
On note $F = \mathrm{Vect}\,(f_1, \ldots, f_p)$ et $q = \dim(F)$.
On considère alors une forme linéaire g qui vérifie :

$$\forall x \in E,\ \Big(f_1(x) = \ldots = f_p(x) = 0\Big) \ \Rightarrow \ \Big(g(x) = 0\Big)$$

Démontrer : $g \in F$.

Exercice 28
On note $E = \mathbb{K}[X]$ et on considère l'endomorphisme φ de E défini par :

$$\varphi(P) = P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(1 - \frac{X}{2}\right) - 2P(X)$$

1. ***a)*** Déterminer le degré de $\varphi(P)$ en fonction du degré du polynôme P.

b) Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

2. On pose $Q_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n = \varphi(X^n)$.

a) Montrer que la famille $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de E.

b) Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un hyperplan de E.

3. On considère la forme linéaire θ sur E définie par $\theta(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\ dt$.

Montrer : $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\theta)$.

Exercice 29
On note $F = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a\,x\}$.
Démontrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 30
On considère :

× $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

× F l'ensemble des fonctions constantes sur $[0,1]$.

× $G = \left\{ g \in E \mid \displaystyle\int_0^1 g(t)\ dt = 0 \right\}$.

Démontrer que F et G sont deux supplémentaires de E.

Exercice 31
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E.

1. Démontrer : $\big(H \cap F\big) + \big(H \cap G\big) \subset H \cap \big(F + G\big)$.

2. Le résultat précédent est-il toujours une égalité ?

Oraux HEC

Exercice avec préparation 1

1. Question de cours : Définition et représentation graphique de la fonction partie entière.
On note E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par les quatre fonctions f_0, f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = \mathrm{e}^x,\ f_3(x) = x\mathrm{e}^x.$$

2. On note : $\mathscr{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$.

a) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de F.

b) Montrer que toutes les fonctions de F sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

3. Soit Φ l'application définie par : pour tout $f \in F$, $\Phi(f) = f'$, où f' est la dérivée de f.

a) Justifier que Φ est un endomorphisme de F et écrire la matrice M de Φ dans la base $\mathscr{B}$.

b) L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

c) Montrer que f_3 appartient à $\mathrm{Im}(\Phi)$ et résoudre dans F l'équation : $\Phi(f) = f_3$.

4. On note G l'ensemble des fonctions g de E telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x+1) - g(x) = 0$$

a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E et trouver $F \cap G$.

b) Trouver un élément de G qui n'appartienne pas à F.

5. Trouver toutes les fonctions de F vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) - f(x) = (\mathrm{e} - 1)\, f'(x)$.

Exercice avec préparation 2

1. Question de cours : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I.
Propriétés de l'application $x \in I \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$.
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.
Pour tout fonction $f \in E$, on note $T(f)$ l'application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)\ dt.$$

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, soit f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = \mathrm{e}^{ax}$. Déterminer $T(f_a)$.

3. **a)** Montrer que pour toute fonction $f \in E$, l'application $T(f)$ appartient à E et est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer la fonction dérivée de la fonction $T(f)$.

b) On suppose que f est une fonction bornée de E. Montrer que $T(f)$ est bornée et établir l'existence d'un réel K tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|T(f)(x) - T(f)(y)| \leqslant K|x - y|$.

4. Soit T l'application de E dans E qui à $f \in E$, associe $T(f)$.

a) Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il surjectif ?

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Montrer que $T(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

c) Soit T_n la restriction à $\mathbb{R}_n[X]$ de l'endomorphisme T et $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. L'endomorphisme T_n est-il diagonalisable ? T_n est-il bijectif ?

Exercice avec préparation 3

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2. On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on note D et T les deux applications suivantes :

$$D : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & ad - bc \end{array} \right. \quad \text{et} \quad T : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & a + d \end{array} \right.$$

2. Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Exprimer $D(AB)$ en fonction de $D(A)$ et $D(B)$. Montrer que $T(AB) = T(BA)$.

b) En déduire que si A et B sont semblables, on a $D(A) = D(B)$ et $T(A) = T(B)$.

3. Déterminer $\mathrm{Ker}(D)$ et $\mathrm{Ker}(T)$. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(T)$?
Dorénavant, si $u \in \mathscr{L}(E)$ de matrice A dans une base $\mathscr{B}$ de E, on note :

$$D(u) = D(A) \quad \text{et} \quad T(u) = T(A)$$

4. On note id_E l'endomorphisme identité de E. Exprimer $u^2 = u \circ u$ en fonction de u et id_E.

5. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathcal{S}_0 = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid u \circ v - v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E)}\}$.
Montrer que $\mathcal{S}_0$ est un espace vectoriel contenant $\{P(u) \mid P \in \mathbb{R}[X]\}$.

6. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ avec $u \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. On pose : $\mathcal{S} = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid u \circ v - v \circ u = u\}$.

a) Montrer que si $\mathcal{S}$ est non vide, alors l'endomorphisme u ne peut être bijectif.
En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur u^2 pour que $\mathcal{S}$ soit non vide.

b) On suppose que $\mathcal{S}$ est non vide. Établir l'existence d'une base $\mathscr{B}_1 = (e_1, e_2)$ de E dans laquelle la matrice M_u de u d'écrit $M_u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et déterminer la forme générale de la matrice des éléments v de $\mathcal{S}$ dans cette même base.

c) On suppose que $\mathcal{S}$ est non vide. Montrer que $\mathcal{S} = \{v_0 + \alpha \mathrm{id}_E + \beta u, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ où v_0 est un endomorphisme non inversible de E à déterminer.

Exercice avec préparation 4

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

1. Question de cours
Que peut-on dire du degré de la somme et du produit de deux polynômes ?

Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et f l'application qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, fait correspondre le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) \;=\; n\,X\,P(X) + X(1-X)P'(X), \text{ où } P' \text{ désigne la dérivée du polynôme } P$$

2. ***a)*** Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) L'endomorphisme f est-il bijectif ? Quel est son rang ?

c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note H_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $H_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$.

a) Calculer pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $f(H_k)(X)$.

b) Montrer que $\mathscr{B} = (H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Trouver les coordonnées du polynôme $(X+1)^n$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice avec préparation 5

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles à n lignes et n colonnes.
Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ la transposée de M.

1. ***a)*** Question de cours : théorème du rang.

b) Justifier que l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont la somme des coefficients est nulle est un espace vectoriel et préciser sa dimension.

2. Soit φ l'application qui à toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, associe la matrice $\varphi(M) = M + {}^tM$.
Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Dans cette question, et seulement dans cette question, on suppose que $n = 2$.
Pour tout $(i,j) \in [\![1,2]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont nuls excepté celui de la $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.
On rappelle que la famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Écrire la matrice A de φ dans la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$.

b) Préciser le rang de φ.

c) Donner une base du noyau de φ.

4. On suppose désormais $n \geqslant 3$.

a) Déterminer $\varphi(\varphi(M))$, pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de l'endomorphisme φ ?

b) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Exercice avec préparation 6

1. Question de cours : Définition d'un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.
Si $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_p[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.
On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{R}_p[X]$, alors $P(A)$ désigne la matrice $a_0\, I_n + a_1\, A + \cdots + a_p\, A^p$.

2. Soit A et Q deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose que la matrice Q est inversible, d'inverse notée Q^{-1}.
Soit P un polynôme à coefficients réels. Expliciter $P\big(Q^{-1}AQ\big)$ en fonction de $P(A)$, Q et Q^{-1}.

3. ***a)*** Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts et soit φ l'application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, associe le n-uplet $\big(P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)\big)$.
Montrer que l'application φ est bijective.

b) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ n réels distincts non nuls et $T = (t_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $t_{i,i} = \lambda_i$.
Établir l'existence d'un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\lambda_i\ P(\lambda_i) = 1$$

Que vaut $T \times P(T)$? Conclure.

4. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ soit égale à $P(A)$.

Exercice avec préparation 7

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
On définit l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.
On pose $H_0(X) = 1$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $H_k(X) = \dfrac{X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)}{k!}$.
On note $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.

2. ***a)*** Montrer que φ est un endomorphisme non bijectif de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Justifier que la famille $\mathscr{B}' = (H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Déterminer la matrice M' de φ dans la base $\mathscr{B}'$.

d) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

3. Dans cette question, p est un entier fixé supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, soit f_i l'application de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall Q \in \mathbb{R}_p[X]$, $f_i(Q) = \sum\limits_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \dbinom{i}{k} Q(k)$.

a) Justifier que pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, l'application f_i est linéaire.

b) Soit $(i, j) \in [\![0, p]\!]^2$. Établir la relation : $f_i(H_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

c) Soit a_0, a_1, …, a_p les réels vérifiant : $X^p = a_0 H_0 + a_1 H_1 + \cdots + a_p H_p$.
Déduire de la question précédente, la relation : $\forall i \in [\![0, p]\!]$, $a_i = \sum\limits_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \dbinom{i}{k} k^p$.