Colles

semaine 7 : 07 octobre - 12 octobre

I. Questions de cours

Exercice 1

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$ | Calcul de $\displaystyle\int_1^2 \frac{t^2+1}{(t^3+3t)^2}\,dt$ | Calcul de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2\,kn}}$.

Exercice 2

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$ | Calcul de $\displaystyle\int_1^2 \frac{2}{3^t}\,dt$

Démontrer que $x\mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,dt$ est dérivable sur $[1,+\infty[$ et déterminer sa dérivée.

Exercice 3

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,dt$ | Calcul de $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{2\,t}{\sqrt{1-\frac{t^2}{2}}}\,dt$

Démontrer que $x\mapsto \displaystyle\int_1^{x}\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,dt$ est dérivable sur $[1,+\infty[$ et déterminer sa dérivée.

II. Autres exercices

Exercice 4

On pose : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3(t)}{t^2}\,dt.$

1. Justifier que I converge.

2. ***a)*** Démontrer : $\forall t\in[0,+\infty[,\ \sin^3(t) = -\dfrac{1}{4}\,\sin(3t)+\dfrac{3}{4}\,\sin(t)$.

b) En déduire : $I = \dfrac{3}{4}\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_x^{3x}\frac{\sin(t)}{t^2}\,dt.$

3. Montrer que la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g : t\mapsto \dfrac{\sin(t)-t}{t^2}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

4. En déduire la valeur de I.

Exercice 5

1. Justifier que pour tout $x>0$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt$ est convergente.

On définit alors $f : x\mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt$ *sur l'intervalle* $]0,+\infty[$.

2. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

3. Calculer la limite de f en $+\infty$. Que vaut la limite de f en 0 ?

4. Montrer qu'il existe $C>0$ telle que pour tout $x\in]0,1]$: $\left|\displaystyle\int_x^1\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt+\ln(x)\right|\leqslant C.$

En déduire : $f(x)\underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)$.

5. Démontrer : $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

Exercice 6

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+n}\, dx$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est une intégrale convergente.

2. Établir : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

3. Établir la convergence et donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x}\, dx$.

4. Former un développement asymptotique de I_n à la précision $\underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

Exercice 7

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Préciser f'.

2. Etudier les variations de f.

3. ***a)*** Montrer que, pour tout $x > 0$: $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\, dt$.

Encadrer cette dernière intégrale et en déduire que : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

b) Montrer que, pour tout $x > 0$: $\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt + \ln(x) = \int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t}\, dt$.

En déduire que : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)$.

c) Dresser le tableau de variations de f.

4. ***a)*** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge et calculer sa valeur.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, f(t)\, dt$ converge.

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de I_n.

Exercice 8

1. Déterminer les réels x pour lesquels $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^x}$ converge.

On note alors $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^x}$.

2. Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En évaluant $F(n) - F(n+1)$, déterminer à l'aide d'une intégration par parties, une relation de récurrence entre $F(n)$ et $F(n+1)$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $F(-n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1}$.

5. Étudier les variations de la fonction F sur son domaine de définition.

6. ***a)*** Pour $x < 0$ fixé, étudier les variations de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^x}$ sur $[0,1]$.

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x)$.

7. ***a)*** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{xt^2}{2}}\, dt$.

b) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

Exercice 9

1. Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t^3}\, dt$ ***b)*** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\ln(1+t) - t}\, dt$ ***c)*** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\ \mathrm{e}^t - t^2\ \ln(t)\ \mathrm{e}^{-t}}{t^3\ \mathrm{e}^{2t} - 1}\, dt$

2. ***a)*** Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\, dx$ (on pourra penser au changement de variable $u = \sqrt{x}$).

b) Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\, dx$ en posant le changement de variable $u = \sqrt{1+\mathrm{e}^x}$.

3. On considère la fonction définie sur $]-\infty, +\infty[$ par $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{-x}^{x^2} \ln(1+t^2)\, dt$.

Démontrer que φ est $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.

Exercice 10

On pose pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_0(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ et $J_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^x t^n \mathrm{e}^{-t}\, dt$.

1. Calculer pour tout réel $x > 0$, $J_1(x)$.

2. Établir pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation : $J_n(x) = J_{n-1}(x) - \dfrac{1}{n!}x^n \mathrm{e}^{-x}$.

3. En déduire pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $J_n(x)$ sous forme de somme.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\, dt$ est convergente et calculer sa valeur.

5. On note : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{n(x+\ln(1-x))} dx$.

À l'aide du changement de variable $t = n(1-x)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_n = n!\frac{\mathrm{e}^n}{n^{n+1}}\ J_n(n)$$

Exercice 11

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$.

1. Justifier la convergence de $J_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$. En déduire la convergence de I_1.

2. On pose, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, $J_n(a) = \displaystyle\int_0^a x^n \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$.

Trouver une relation de récurrence entre $J_n(a)$ et $J_{n-2}(a)$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n converge et trouver une relation de récurrence liant I_n à I_{n-2}.

3. Calculer I_n, pour tout n impair.

En admettant que $I_0 = \sqrt{2\pi}$, calculer I_n, pour tout n pair.

Exercice 12

On considère la fonction numérique F définie par : $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4+t^4}}\, dt$

1. Déterminer le domaine de définition de F et montrer que F est une fonction impaire.

2. Établir, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $\dfrac{x}{\sqrt{4+16x^4}} \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{4+x^4}}$.

En déduire la limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. Justifier la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.

Exercice 13

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\, dx$.

1. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'intgérale I_n est convergente.

2. Pour tout $n \geqslant 1$, déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} I_k$. Montrer que :

$$\forall n \geqslant 1,\ S_n = \frac{1}{2} - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3\ (1+x^3)^n}\, dx$$

4. En déduire la nature de la série de terme général I_n, et sa somme en cas de convergence.

Exercice 14. *Interversion Limite/Intégrale ?*

Soit la suite de fonctions (f_n) définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = 2nx\mathrm{e}^{-nx^2}$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\, dt$.

1. Calculer pour tout $t \in [0,1]$ la limite de $f_n(t)$ lorsque n tend vers l'infini.

2. Calculer I_n. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$?

3. A-t-on l'égalité suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\, dt = \int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\, dt$?

Exercice 15

On note $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)\, dx$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que I_n est convergente. Calculer I_n en fonction de n.

2) En déduire que (I_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 16

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\, dx$.

1. Calculer I_0, puis trouver une relation entre I_n et I_{n+1}.

2. En déduire I_n en fonction de n.

Exercice 17

On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln(x)}{1-x}\, dx$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n \ln(x)}{1-x}\, dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 x^n \ln(x)\, dx$$

1. Montrer que l'intégrale I est convergente.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est convergente.

3. Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$, $-1 \leqslant \dfrac{x\ln(x)}{1-x} \leqslant 0$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{n} \leqslant I_n \leqslant 0$, puis la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Montrer que l'intégrale J_n est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$, et calculer sa valeur.

5. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} J_k$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I = -\sum\limits_{k=2}^{n+1} \dfrac{1}{k^2} + I_{n+1}$.

Exercice 18

1. Soit f la fonction définie par $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1-t}$.

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$ converge.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in]0,1[$:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k \ln(t) + \frac{t^{n+1} \ln(t)}{1-t}$$

c) Montrer que la fonction $g : t \mapsto \dfrac{t \ln(t)}{1-t}$ définie sur $]0,1[$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$.

d) En déduire une expression de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\, dt$ sous la forme d'une série de Riemann.

2. Pour tout $x \in]-\infty, 1]$, on pose : $L(x) = -\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt$.

a) Montrer que la fonction L est bien définie sur $]-\infty, 1]$.

b) Exprimer $L(1)$ à l'aide d'un résultat précédent.

3. ***a)*** Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $L(x) = -\ln(1-x)\ln(x) + L(1) - L(1-x)$.

b) Déterminer la valeur de $L\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

4. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $L(x) + L(-x) = \dfrac{1}{2}\, L(x^2)$.

Exercice 19

Soit f une fonction définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de classe C^∞ sur $[0,1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\, dx$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge, puis déterminer sa limite.

2. On suppose que $f(1) \neq 0$. Trouver un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

3. On suppose que $f(1) = 0$. Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

4. Soit h une fonction continue sur $[0,1]$.

a) En utilisant la continuité de h au point 1, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n \int_0^1 x^n \big(h(x) - h(1)\big) dx\right) = 0$$

b) En déduire que la suite $\left(n \displaystyle\int_0^1 x^n h(x)\, dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et exprimer sa limite à l'aide de la fonction h.

Exercice 20

On note E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles continues sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout élément f de E et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(u)\, du$.

1. Justifier que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et donner pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ l'expression de $F'(x)$.

Soit $\Psi : f \in E \mapsto \Psi(f)$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \ \Psi(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x\,t)\, dt$.

2. Exprimer, pour tout réel x strictement positif, $\Psi(f)(x)$ à l'aide de $F(x)$.

3. Justifier que la fonction $\Psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et donner la valeur de $\Psi(f)(0)$.

4. Montre que Ψ est un endomorphisme de E.

5. **Surjectivité de Ψ**

Soit $h : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto h(x) = \begin{array}{ll} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \textit{pour } x > 0 \\ 0 & \textit{pour } x = 0 \end{array}$

a) Montrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) La fonction h est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$?

c) Soit $g \in \mathrm{Im}(\Psi)$.
Montrer que la fonction $x \mapsto x\,g(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

d) A-t-on $h \in \mathrm{Im}(\Psi)$?

e) Conclure.

6. Montrer que Ψ est injective.

7. **Recherche des éléments propres de Ψ**

a) Justifier que 0 n'est pas valeur propre de Ψ.
Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (L) sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y' + \frac{\mu}{x}\, y = 0$$

b) Résoudre (L) sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Déterminer les solutions de (L) prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}_+$.

d) Déterminer alors les valeurs propres de Ψ et les sous-espaces propres associés.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$f_i : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto f_i(x) = x^i \text{ et } g_i : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto g_i(x) = \begin{array}{ll} x^i \ln(x) & \textit{pour } x > 0 \\ 0 & \textit{pour } x = 0 \end{array}$$

On note $\mathscr{B} = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ et F_n le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathscr{B}$.

a) **On veut montrer que la famille $B = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ est une base de F_n**

Soient $(\alpha_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et $(\beta_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$ des familles de scalaires tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\, f_i + \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j\, g_j = 0.$ (*)

(i) Montrer que $\alpha_1 = \beta_1 = 0$.
On pourra simplifier l'expression (*) par x lorsque x est non nul.

(ii) Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose que $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \dots = \beta_p = 0$.
Démontrer que $\alpha_{p+1} = \beta_{p+1} = 0$.

(iii) Conclure et déterminer la dimension de l'espace vectoriel F_n.

b) **Où l'on démontre que Ψ induit un endomorphisme sur F_n**

(i) Soient $x > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t^p \ \ln(t) \ dt$ est convergente et la calculer.

(ii) En déduire que Ψ induit un endomorphisme Ψ_n sur F_n.

c) Donner la matrice de l'application Ψ_n dans la base $\mathscr{B}$.

d) Démontrer que Ψ_n est un automorphisme de F_n.

e) Soit $z : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto z(x) = \begin{cases} \left(x + x^2\right) \ln(x) & \textit{pour } x > 0 \\ 0 & \textit{pour } x = 0 \end{cases}$.

Après avoir vérifié que $z \in F_n$, déterminer $\Psi_n^{-1}(z)$.

Exercice 21

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et u un endomorphisme de E, tel que :

$$u^2 - 3\,u + 2\,\mathrm{id}_E = 0$$

où 0 désigne l'endomorphisme nul $0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. L'endomorphisme u est il diagonalisable ?

2. Déterminer les valeurs propres possibles α et β de l'endomorphisme u. On choisira α inférieure à β.

3. On pose alors $v = u - \alpha\mathrm{id}_E$ et $w = u - \beta\mathrm{id}_E$.

a) Déterminer l'endomorphisme $v - w$ et en déduire que $E = \mathrm{Im}(v) + \mathrm{Im}(w)$.

b) Préciser $v \circ w$ et $w \circ v$.

c) Prouver que $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Ker}(v)$ et que $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(w)$.

d) Démontrer que $E = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Ker}(w)$.

4. Comment peut-on déterminer une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale ?

5. **Application**

Dans cette question, E est de dimension trois. On munit E de la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et, dans cette base, on définit l'endomorphisme u par sa matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que u satisfait à la relation ($\star$). On fera apparaûtre les calculs sur la copie.

b) Déterminer les matrices V et W des endomorphismes v et w définis à la question 3.

c) Déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de $\mathrm{Ker}(v)$ et une base $\mathscr{B}_2$ de $\mathrm{Ker}(w)$.

d) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $U = PDP^{-1}$.

Exercice 22

On note $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

On rappelle que pour tout $(x,t) \in [0,1]^2$, on note $\min(x,t) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant t \\ t & \text{sinon} \end{cases}$.

Questions préliminaires

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$, suivant les valeurs de α, l'équation différentielle $y'' + \alpha\, y = 0$.

2. Soient $h \in E$ et $a \in [0,1]$.

Justifier que la fonction $H : x \mapsto \displaystyle\int_a^x h(t)\, dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et déterminer sa dérivée.

* * * * *

3. **Cas particuliers**

- ***a)*** Tracer la courbe représentative de la fonction $t \mapsto \min\left(\frac{1}{3}, t\right)$ sur l'intervalle $[0,1]$.
- ***b)*** Calculer $\displaystyle\int_0^1 \min\left(\frac{1}{3}, t\right)\, dt$.
- ***c)*** Soit x un réel de $[0,1]$, exprimer $\displaystyle\int_0^1 \min(x,t)\, dt$ en fonction de x.

4. Soit $f \in E$.

- ***a)*** Justifier que $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \min(x,t) f(t)\, dt$ définit une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$, calculer $F'(x)$.
- ***b)*** Calculer $F(0)$ et $F'(1)$.
- ***c)*** Démontrer alors que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ et montrer que $F'' = -f$. À toute fonction f de E, on associe $T(f)$ définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad T(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\, dt$$

5. Montrer que T est un endomorphisme de E.

6. L'application T est-elle injective ?

7. On pose $A = \left\{G \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R}), G(0) = G'(1) = 0\right\}$.

- ***a)*** Montrer que $\mathrm{Im}(T) \subset A$.
- ***b)*** Soit $G \in A$. Calculer $T\left(G''\right)$.
- ***c)*** Déterminer $\mathrm{Im}(T)$.

8. **Recherche des éléments propres de T**

- ***a)*** Démontrer par l'absurde que, si λ est une valeur propre de T, alors λ est strictement positive. On pourra utiliser la question *4*.
- ***b)*** Déterminer les valeurs propres de T. On pourra aussi utiliser la question *4*.
- ***c)*** Pour chaque valeur propre de T, déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.

Exercice 23

Soit n un entier naturel non nul.

On note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P_k = X^k$.

Questions de cours

Soit α un réel.

1. Justifier que la famille $\mathcal{E} = (1, X - \alpha, \ldots, (X - \alpha)^n)$ est une base de E_n.

2. Soit P un polynôme de E_n.
Donner sans démonstration la décomposition de P dans la base $\mathcal{E}$ à l'aide des dérivées successives du polynôme P.

3. On suppose que α est une racine d'ordre $r \in [\![1, n]\!]$ de P.
Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $(X - \alpha)^r$.

$* * * * *$

À tout polynôme P de E_n, on associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = XP(X) - \frac{1}{n}\left(X^2 - 1\right) P'(X)$$

et on note T l'application qui à P associe Q.

4. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer $T\left(P_k\right)$.

5. Montrer que T est un endomorphisme de E_n.

6. écrire la matrice M de T dans la base $\mathscr{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de E_n.

7. On suppose que λ est une valeur propre réelle de l'endomorphisme T et soit P un polynôme unitaire, vecteur propre associé à la valeur propre λ.

a) Montrer que P est de degré n.

b) Soit z_0 une racine complexe de P d'ordre de multiplicité $r \in \mathbb{N}^*$. Prouver que $z_0^2 - 1 = 0$.

c) En déduire une expression de P.

8. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme T.
L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?

Exercice 24

On note E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles continues sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout élément f de E et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(u)\, du$.

1. Justifier que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et donner pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ l'expression de $F'(x)$.

Soit $\Psi : f \in E \mapsto \Psi(f)$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \ \Psi(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x\,t)\, dt$.

2. Exprimer, pour tout réel x strictement positif, $\Psi(f)(x)$ à l'aide de $F(x)$.

3. Justifier que la fonction $\Psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et donner la valeur de $\Psi(f)(0)$.

4. Montre que Ψ est un endomorphisme de E.

5. **Surjectivité de Ψ**

Soit $h : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto h(x) = \begin{array}{ll} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \textit{pour } x > 0 \\ 0 & \textit{pour } x = 0 \end{array}$

a) Montrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) La fonction h est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$?

c) Soit $g \in \mathrm{Im}(\Psi)$.
Montrer que la fonction $x \mapsto x\,g(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

d) A-t-on $h \in \mathrm{Im}(\Psi)$?

e) Conclure.

6. Montrer que Ψ est injective.

7. **Recherche des éléments propres de Ψ**

a) Justifier que 0 n'est pas valeur propre de Ψ.
Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (L) sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y' + \frac{\mu}{x}\, y = 0$$

b) Résoudre (L) sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Déterminer les solutions de (L) prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}_+$.

d) Déterminer alors les valeurs propres de Ψ et les sous-espaces propres associés.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$f_i : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto f_i(x) = x^i \text{ et } g_i : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto g_i(x) = \begin{matrix} x^i\ \ln(x) & \textit{pour } x > 0 \\ 0 & \textit{pour } x = 0 \end{matrix}$$

On note $\mathscr{B} = (f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n)$ et F_n le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathscr{B}$.

a) **On veut montrer que la famille $B = (f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n)$ est une base de F_n**

Soient $(\alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(\beta_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ des familles de scalaires tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\, f_i + \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j\, g_j = 0$. $(*)$

(i) Montrer que $\alpha_1 = \beta_1 = 0$.
On pourra simplifier l'expression (*) par x lorsque x est non nul.

(ii) Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0$.
Démontrer que $\alpha_{p+1} = \beta_{p+1} = 0$.

(iii) Conclure et déterminer la dimension de l'espace vectoriel F_n.

b) **Où l'on démontre que Ψ induit un endomorphisme sur F_n**

(i) Soient $x > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t^p\ \ln(t)\ dt$ est convergente et la calculer.

(ii) En déduire que Ψ induit un endomorphisme Ψ_n sur F_n.

c) Donner la matrice de l'application Ψ_n dans la base $\mathscr{B}$.

d) Démontrer que Ψ_n est un automorphisme de F_n.

e) Soit $z : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto z(x) = \begin{cases} \left(x + x^2\right)\ln(x) & \textit{pour } x > 0 \\ 0 & \textit{pour } x = 0 \end{cases}$.

Après avoir vérifié que $z \in F_n$, déterminer $\Psi_n^{-1}(z)$.

Exercice 25

Soient n un entier naturel non nul et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

1. Soient $q \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{N}^*$. Donner, sans démonstration, une autre expression de $\sum\limits_{k=0}^{r} q^k$.

2. Soit p un entier naturel non nul.
Déterminer, dans $\mathbb{R}[X]$, le reste et le quotient de la division euclidienne de $X^p - 1$ par $X - 1$.

3. Soit $P \in E_n$.
Montrer qu'il existe un polynôme Q de E_n tel que : $\forall x \neq 1,\ Q(x) = \frac{1}{x-1} \displaystyle\int_1^x P(t)\ dt$.

On définit ainsi une application $f : P \mapsto Q$.

4. Prouver que f est un endomorphisme de E_n.

5. Montrer que f est un automorphisme de E_n et déterminer, pour tout Q de E_n, le polynôme $f^{-1}(Q)$ à l'aide de Q et de ses dérivées.

6. Soit A la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de E_n.
Déterminer A et A^{-1}.

7. Déterminer les spectres des matrices A et A^{-1}.

8. Les matrices A et A^{-1} sont-elles diagonalisables ?

9. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine d'ordre de multiplicité $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ d'un polynôme Q de E_n.
À quelles conditions α est-il racine de $f^{-1}(Q)$ et avec quel ordre de multiplicité ?
On pourra étudier les cas $\alpha = 1$ et $\alpha \neq 1$.

10. Déterminer les sous-espaces propres de f^{-1}.

11. Montrer que les sous-espaces propres de f^{-1} sont aussi les sous-espaces propres de f.

Exercice 26

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.

Soit φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\ dt$.

1. Démontrer que $\mathscr{B} = (1, X-1, X(X-1), \ldots, X^{n-1}(X-1))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. **Généralités sur φ.**
   2.1. Démontrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
   2.2. Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$ et la dimension du noyau de φ.
3. On considère alors l'application ψ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme Q tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_0^x P(t)dt.$$
   3.1. Justifier que l'application ψ est linéaire.
   3.2. Démontrer que $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}\,(()\, X, X^2, \ldots, X^{n+1})$.
   3.3. Démontrer que : $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \psi(P) \in \mathrm{Vect}\,(X(X-1), \ldots, X^n(X-1))$.
   3.4. Donner alors une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
4. On note $\mathcal{H} = \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])\mathbb{R}$.
   4.1. Donner la dimension de $\mathcal{H}$.
   4.2. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, soit ψ_k la forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$.
   Démontrer que la famille $(\psi_0, \ldots, \psi_n)$ est une base de $\mathcal{H}$.
   4.3. Déterminer les composantes de φ dans cette base.