# Colles

semaine 8 : 14 octobre - 19 octobre

## I. Questions de cours

**Exercice 1**
Image d'une application linéaire en dimension finie. Énoncé et démonstration.

**Exercice 2**
Application réciproque d'un isomorphisme. Énoncé et démonstration.

**Exercice 3**
***1.*** Soit $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
  ***a)*** Démontrer : $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$.
  ***b)*** Démontrer : $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.
***2.*** Démontrer que l'application :

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ & & P & \mapsto & 2\,X\,P(X) + X\,(1-X)\,P'(X) \end{array}$$

est un endomorphisme.

## II. Autres exercices

**Exercice 4**
Pour tout $P \in E = \mathbb{R}_n[X]$, on note $\big(\varphi(P)\big)(X) = P(X+1)$.
***1.*** Déterminer la matrice de $\varphi$ dans la base canonique.
***2.*** Déterminer $\varphi^{-1}$ ainsi que la matrice de $\varphi^{-1}$ dans la base canonique.

**Exercice 5**
Soient $A$ la matrice dont la dernière ligne et la dernière colonne valent $(1\ 2\ 3 \dots n)$, avec des 0 partout ailleurs, et $f$ un endomorphisme représenté par $A$.
***1.*** Quel est le rang de $f$ ?
***2.*** Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires.
***3.*** Écrire la matrice de $f$ dans une base adaptée à $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

**Exercice 6**
Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $A^2 = 0$, et soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A$.
***1.*** Montrer que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$, et préciser la dimension de ces deux sous-espaces.
***2.*** Montrer que $A$ est semblable à la matrice élémentaire $E_{1,2}$.
***3.*** Pour toute matrice $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on note : $C_B = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MB\}$.
  ***a)*** Soit $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que $C_B$ est un espace vectoriel.
  ***b)*** Déterminer $C_{E_{1,2}}$.
  ***c)*** En déduire la dimension de $C_A$.

**Exercice 7**
Soient $E$ est un espace vectoriel de dimension finie, $p$ et $q$ des projecteurs de $E$.

Montrer l'équivalence : $\text{Ker}(p) = \text{Ker}(q) \;\Leftrightarrow\; p \circ q = p \;\text{ et }\; q \circ p = q$.

**Exercice 8**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

***1.*** Monrer que pour tout vecteur $x \neq 0_E$ de $E$, il existe une forme linéaire $\varphi$ sur $E$ telle que $\varphi(x) = 1$.

***2.*** ***a)*** Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$. Montrer que l'application :

$$\theta \;:\; \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K}^n \\ x & \mapsto & \big(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)\big) \end{array}$$

est un isomorphisme.

***b)*** En déduire l'existence d'une base $\left(e_i\right)_{i \in [\![1,n]\!]}$ de $E$ telle que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\; \varphi_j(e_i) = \delta_{i,j}$.

***3.*** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $f_1, \ldots, f_p$ des formes linéaires de $E$.
On note $F = \text{Vect}\,(f_1, \ldots, f_p)$ et $q = \dim(F)$.
On considère alors une forme linéaire $g$ qui vérifie :

$$\forall x \in E,\; \Big(f_1(x) = \ldots = f_p(x) = 0\Big) \;\Rightarrow\; \Big(g(x) = 0\Big)$$

Démontrer : $g \in F$.

**Exercice 9**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère deux endomorphismes $f$ et $g$ de $E$ vérifiant :

× $\text{rg}(f) \geqslant 2$,

× pour tout $x \in E$, la famille $(f(x), g(x))$ est liée.

Le but est de montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{K}$ tel que : $f = \gamma \cdot g$.

***1.*** ***a)*** Justifier qu'il existe $G$, sous-espace vectoriel de $E$ tel que : $E = G \oplus \text{Ker}(g)$.

***b)*** Justifier que la restriction de $g$ à $G$ (notée $g_{|G}$ est une application injective.
*On rappelle que $g_{|G}$ est l'application linéaire définie par :*

$$g_{|G} \;:\; \begin{array}{ccc} G & \to & E \\ x & \mapsto & g(x) \end{array}$$

***2.*** On considère $(u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n)$ une base adaptée à la décomposition précédente où $r = \dim(G)$.

***a)*** On définit la famille $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ par :

$$\forall i \in [\![1,r]\!], e_i = u_i \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![r+1,n]\!], e_i = u_i + u_2$$

Démontrer que $\mathscr{B}$ est une base de $E$.

***b)*** Démontrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la famille $\big(g(e_1), g(e_i)\big)$ est libre.

***3.*** ***a)*** Démontrer précisément que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, il existe $\gamma_i \in \mathbb{K}$ tel que : $f(e_i) = \gamma_i\, g(e_i)$.

***b)*** Que faut-il démontrer pour conclure ?

***c)*** Conclure.
*On pourra s'inspirer du point précédent et considérer le vecteur $e_1 + e_i$ pour tout $i \in [\![2,n]\!]$*

**Exercice 10**
On note $E = \mathbb{K}[X]$ et on considère l'endomorphisme $\varphi$ de $E$ défini par :

$$\varphi(P) = P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(1 - \frac{X}{2}\right) - 2P(X)$$

***1.*** ***a)*** Déterminer le degré de $\varphi(P)$ en fonction du degré du polynôme $P$.

***b)*** Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

***2.*** On note $Q_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n = \varphi(X^n)$.

***a)*** Montrer que la famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $E$.

***b)*** Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un hyperplan de $E$.

***3.*** On considère la forme linéaire $\theta$ sur $E$ définie par $\theta(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt$.

Montrer : $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\theta)$.

**Exercice 11**
Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $2p$.

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.

Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

***(i)*** $\varphi^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $\mathrm{rg}(\varphi) = p$ ;

***(ii)*** $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Im}(\varphi)$ ;

***(iii)*** il existe une base $\mathscr{B}$ de $E$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $A \in GL_p(\mathbb{K})$.

**Exercice 12**
Soit $A = \mathrm{diag}(1, \ldots, n)$.

Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec $A$.
Montrer que cet ensemble est $\mathbb{R}_{n-1}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}$.

**Exercice 13**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (de dimension finie).

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $p$ un projecteur de $E$.

Montrer l'équivalence entre :

***(i)*** $f$ et $p$ commutent,

***(ii)*** $f$ stabilise $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$.

**Exercice 14**
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

***1.*** Soit $X$ une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = A$.
Montrer que $X$ et $A$ commutent, puis que $X$ est triangulaire supérieure.

***2.*** Trouver toutes les matrices $X$ telles que $X^2 = A$.

**Exercice 15** *(Mines 2 - 2017)*

- Dans tout le problème, les espaces vectoriels considérés ont $\mathbb{C}$, le corps des complexes, pour corps de base. Étant donnés deux entiers naturels $n$ et $p$ non nuls, on note $M_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à $n$ lignes et $p$ colonnes et à coefficients dans $\mathbb{C}$ (et $0_{n,p}$ sa matrice nulle) et $M_n(\mathbb{C})$ celui des matrices carrées à $n$ lignes et à coefficients dans $\mathbb{C}$ (et $0_n$ sa matrice nulle).
- Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On note $\mathscr{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de $E$.
- Un endomorphisme $u$ de $E$ est dit **échangeur** lorsqu'il existe des sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ de $E$ tels que :
$$E = F \oplus G,\ u(F) \subset G \ \text{ et } \ u(G) \subset F$$
- Étant donnés deux endomorphismes $u$ et $v$ de $E$, on dit que $v$ est **semblable** à $u$ lorsqu'il existe un automorphisme $\varphi$ de $E$ tel que $v = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$. On notera que dans ce cas $u = \varphi^{-1} \circ v \circ (\varphi^{-1})^{-1}$, si bien que $u$ est semblable à $v$.
- On dit que $u$ est **de carré nul** lorsque $u^2$ est l'endomorphisme nul de $E$.
- On dit que $u$ est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier naturel $n \geqslant 1$ tel que $u^n = 0$.
- Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est dite **de carré nul** lorsque $A^2 = 0$.

L'objectif du problème est d'établir, pour un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, l'équivalence entre les conditions suivantes :

**(C1)** l'endomorphisme $u$ est échangeur ;

**(C2)** il existe $a, b \in \mathscr{L}(E)$, tous deux de carré nul, tels que $u = a + b$ ;

**(C3)** les endomorphismes $u$ et $-u$ sont semblables.

Chacune des parties A et B est indépendante des autres. Les résultats de la partie D sont essentiels au traitement des parties E et F.

## A. Quelques considérations en dimension 2

On se donne ici un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2 et un endomorphisme $u$ de $E$.

*1.* Montrer que si $u$ vérifie la condition **(C3)** alors $u$ est de trace nulle.

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose $u$ de trace nulle et de déterminant non nul.
On choisit un nombre complexe $\delta$ tel que $\delta^2 = -\det(u)$.

*2.* Montrer que $u^2 = \delta^2 \mathrm{I}_E$, déterminer le spectre de $u$ et préciser la dimension des sous-espaces propres.

*3.* Expliciter, à l'aide de vecteurs propres de $u$, une droite vectorielle $D$ telle que $u(D) \not\subset D$ et en déduire que $u$ est échangeur.

## B. La condition (C1) implique (C2) et (C3)

Soient $n$ et $p$ deux entiers naturels non nuls. Soient $A \in M_{p,n}(\mathbb{C})$ et $B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$. On considère dans $M_{n+p}(\mathbb{C})$ la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{pmatrix}$$

*4.* Calculer le carré de la matrice $\begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix}$ de $M_{n+p}(\mathbb{C})$. Montrer ensuite que $M$ est la somme de deux matrices de carré nul.

*5.* On considère dans $M_{n+p}(\mathbb{C})$ la matrice diagonale par blocs
$$D = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -I_p \end{pmatrix}$$
Montrer que $D$ est inversible, calculer $D^{-1}$ puis $DMD^{-1}$, et en déduire que $M$ est semblable à $-M$.

Jusqu'à la fin de cette partie, on se donne un endomorphisme $u$ d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie. On suppose que $u$ est échangeur et on se donne donc une décomposition $E = F \oplus G$ dans laquelle $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels vérifiant $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$.

***7.*** On suppose ici $F$ et $G$ tous deux non nuls.
On se donne une base $(f_1, \ldots, f_n)$ de $F$ et une base $(g_1, \ldots, g_p)$ de $G$.
La famille $\mathscr{B} = (f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_p)$ est donc une base de $E$.
Compte-tenu des hypothèses, décrire la forme de la matrice $u$ dans $\mathscr{B}$.

***8.*** Déduire des questions précédentes que $u$ vérifie **(C2)***et*(**C3**). *On n'oubliera pas de considérer le cas où l'un des sous-espaces $F$ ou $G$ est nul.*

## C. La condition (C2) implique (C1) : cas d'un automorphisme

Dans cette partie, $u$ désigne un automorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie. On suppose qu'il existe deux endomorphismes $a$ et $b$ de $E$ tels que

$$u = a + b \quad \text{et} \quad a^2 = b^2 = 0$$

***8.*** Soit $f$ un endomorphisme de $E$ tel que $f^2 = 0$. Comparer $\ker(f)$ à $\mathrm{Im}(f)$ et en déduire

$$\dim(\ker(f)) \geqslant \frac{1}{2}\dim(E)$$

***9.*** Démontrer que $E = \ker(a) \oplus \ker(b)$, et que $\ker(a) = \mathrm{Im}(a)$ et $\ker(b) = \mathrm{Im}(b)$.

***10.*** En déduire que $u$ est échangeur.

## D. Intermède : un principe de décomposition

On se donne dans cette partie un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie, ainsi qu'un endomorphisme $f$ de $E$. On se donne un nombre complexe arbitraire $\lambda$. On pose $v = f - \lambda \mathrm{I}_E$.

***11.*** Montrer que la suite $(\ker(v^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.

***12.*** Montrer qu'il existe un entier naturel $p$ tel que

$$\forall k \geqslant p,\ \ker(v^k) = \ker(v^p)$$

*On pourra introduire la plus grande dimension possible pour un sous-espace vectoriel de la forme* $\ker(v^k)$ *pour* $k \in \mathbb{N}$.
Montrer qu'alors

$$\ker(v^p) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \ker(v^k)$$

et que $p$ peut être choisi parmi les entiers pairs.

Dans la suite de cette partie, on fixe un entier naturel pair $p$ donné par la question 12 et l'on pose

$$E_\lambda^c(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \ker(v^k) = \ker(v^p)$$

On notera que $E_\lambda^c(f)$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

***13.*** Montrer que $E_\lambda^c(f) = \ker(v^{2p})$ et en déduire

$$E = E\lambda^c(f) \oplus \mathrm{Im}(v^p)$$

Montrer en outre que les sous-espaces vectoriels $E_\lambda^c(f)$ et $\mathrm{Im}(v^p)$ sont tous deux stables par $f$.

***14.*** Montrer que $\lambda$ n'est pas valeur propre de l'endomorphisme induit par $f$ sur $\mathrm{Im}(v^p)$. Montrer que si $E_\lambda^c(f)$ n'est pas nul alors $\lambda$ est l'unique valeur propre de l'endomorphisme induit par $f$ sur $E_\lambda^c(f)$.

***15.*** On se donne ici un nombre complexe $\mu \neq \lambda$. On suppose que toute valeur propre de $f$ différente de $\lambda$ est égale à $\mu$.
Montrer que $\mathrm{Im}(v^p) \subset E_\mu^c(f)$, puis que $E = E_\lambda^c(f) \oplus E_\mu^c(f)$.
*On pourra s'intéresser au polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par $f$ sur* $\mathrm{Im}(v^p)$.

# E. La condition (C2) implique (C1) : cas non bijectif

Dans cette partie, on admet la validité de l'énoncé suivant.

**Théorème** : tout endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension finie est échangeur.

On se donne ici un endomorphisme non bijectif $u$ d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie. On suppose qu'il existe deux endomorphismes $a$ et $b$ de $E$ tels que

$$u = a + b \quad \text{et} \quad a^2 = b^2 = 0$$

***16.*** Montrer que $a$ et $b$ commutent avec $u^2$.

On fixe maintenant un entier pair $p$ tel que $E_0^c(u) = \ker(u^p)$, donné par la question 12.

***17.*** Montrer que le sous-espace vectoriel $G = \mathrm{Im}(u^p)$ est stable par $a$ et $b$ et que les endomorphismes induits $a_G$ et $b_G$ sont de carré nul.

***18.*** En déduire que $u$ est échangeur. *On pourra utiliser, entre autres, le résultat final de la partie C.*

# F. La condition (C3) implique (C1)

Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.
Un endomorphisme $u$ de $E$ est dit **indécomposable** lorsque

(i) la condition **(C3)** est vérifiée par $u$

(ii) il n'existe aucune décomposition $E = F \oplus G$ dans laquelle $F$ et $G$ sont des sous-espaces non nuls, stables par $u$ et tels que les endomorphismes induits $u_F$ et $u_G$ vérifient tous deux la condition **(C3)**.

Jusqu'à la question 21 incluse, on se donne un endomorphisme indécomposable $u$ de $E$. On dispose en particulier d'un automorphisme $\varphi$ de $E$ tel que

$$-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$$

***19.*** Montrer que $\varphi^2$ commute avec $u$.

***20.*** Montrer que $\varphi^2$ possède une unique valeur propre $\lambda$. En déduire que les valeurs propres de $\varphi$ sont parmi $\alpha$ et $-\alpha$, pour un certain nombre complexe non nul $\alpha$.
*On utilisera l'indécomposabilité de $u$ ainsi que les résultats des questions 13 et 14.*

***21.*** En déduire que $u$ est échangeur.
*On pourra appliquer le résultat final de la question 15.*

***22.*** En déduire plus généralement que, pour tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, la condition **(C3)** implique la condition **(C1)**.

# Énoncés E3A

**Exercice 16** *(E3A 2024 PC)*

Soit $n$ un entier naturel non nul.

On note $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à $2n$. Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on note $e_k = X^k$ et $\mathscr{B} = (e_0, \ldots, e_{2n})$ la base canonique de $E$.

Pour tout couple de polynômes $(P, Q)$ de $E^2$, on pose $\langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt$ et on rappelle que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $E$.

Soit $L$ l'application définie sur $E$ par :

$$\forall P \in E, L(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\, dt$$

***1.*** Montrer que $L$ est une forme linéaire sur $E$.

***2.*** Déterminer $L(e_k)$ pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$.

***3.*** Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(L)$.

***4.*** Prouver qu'il existe une base $\mathscr{U}$, que l'on ne cherchera pas à expliciter, de $\mathrm{Ker}(L)$, dont le premier vecteur est $e_1$.

***5.*** Montrer :

- ***a)*** $\mathrm{Vect}(e_0)$ et $\mathrm{Ker}(L)$ sont deux sous-espaces orthogonaux,
- ***b)*** $E = \mathrm{Vect}(e_0) \oplus \mathrm{Ker}(L)$.

***6.*** Soit $\lambda$ un réel. On considère l'application $T_\lambda$ définie sur $E$ par :

$$\forall P \in E, T_\lambda(P) = P + \lambda L(P) X$$

- ***a)*** Vérifier que $T_\lambda$ est un endomorphisme de $E$.
- ***b)*** Soit $P \in E$. Calculer $(L \circ T_\lambda)(P)$.
- ***c)*** Déterminer la matrice de $T_\lambda$ dans une base de $E$ adaptée à la décomposition obtenue aux questions ***4*** et ***5***.
- ***d)*** Déterminer les valeurs propres de $T_\lambda$.
- ***e)*** L'endomorphisme $T_\lambda$ est-il diagonalisable ?
- ***f)*** Justifier que $T_\lambda$ est un automorphisme de $E$.
- ***g)*** Pour tous réels $\alpha$ et $\beta$, préciser $T_\alpha \circ T_\beta$.
- ***h)*** Déterminer $T_\lambda^{-1}$.

**Exercice 17** *(E3A 2024 MP)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^\top = 3A^2 - A - I_n$ où $A^\top$ désigne la matrice transposée de la matrice $A$.

***7.*** Démontrer que la matrice $B = 3A^3 - A^2 - A$ est symétrique réelle.

***8.*** Montrer que les valeurs propres de $B$ sont réelles, positives ou nulles.
On pourra étudier le signe de $Y^\top B Y$ pour un vecteur $Y$ de $\mathbb{R}^n$.

***9.*** Montrer que l'on a : $A = 3\left(A^\top\right)^2 - A^\top - I_n$.

***10.*** En déduire que le polynôme $P(X) = \left(3X^2 - X - 1\right)^2 - X^2$ est annulateur de la matrice $A$.

***11.*** Déterminer un polynôme unitaire annulateur de $A^\top$.

***12.*** Factoriser $P$ en un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

***13.*** La matrice $A$ est-elle inversible ?

***14.*** Établir que la matrice $A$ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres possibles.

***15.*** Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$ et $V$ un vecteur propre associé.
Montrer que $V$ est aussi vecteur propre de $A^\top$.

On note $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$ les racines du polynôme $P$.

On appelle $\mathcal{L} = (L_1, L_2, L_3, L_4)$ la famille des polynômes de Lagrange associés à cette famille de scalaires, c'est-à-dire les polynômes $(L_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$ de $\mathbb{R}_3[X]$, espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels, tels que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,4]\!]^2, \quad L_i\left(\alpha_j\right) = \delta_{i,j} \quad \text{où } \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j = i \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{(symbole de Kronecker).}$$

***16.*** ***a)*** Déterminer $L_1$ sous forme d'un produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

***b)*** Vérifier que $\mathcal{L}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

***c)*** Soit $R \in \mathbb{R}_3[X]$. Déterminer les coordonnées du polynôme $R$ dans la base $\mathcal{L}$.

***17.*** **Étude des puissances de $A$**

***a)*** Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

***(i)*** Exprimer le reste de la division euclidienne de $X^k$ par le polynôme $P$ dans la base $\mathcal{L}$.

***(ii)*** En déduire une expression de $A^k$.

***b)*** Démontrer que la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice de projection.
Exprimer cette matrice à l'aide de la matrice $A$ et des $(L_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$.

**Exercice 18** *(E3A 2023 PC)*

Soient $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $u$ un endomorphisme de $E$, tel que :

$$u^2 - 3\,u + 2\,\mathrm{id}_E = 0$$

où 0 désigne l'endomorphisme nul $0_{\mathscr{L}(E)}$.

***1.*** L'endomorphisme $u$ est il diagonalisable ?

***2.*** Déterminer les valeurs propres possibles $\alpha$ et $\beta$ de l'endomorphisme $u$. On choisira $\alpha$ inférieure à $\beta$.

***3.*** On pose alors $v = u - \alpha\mathrm{id}_E$ et $w = u - \beta\mathrm{id}_E$.

- ***a)*** Déterminer l'endomorphisme $v - w$ et en déduire que $E = \mathrm{Im}(v) + \mathrm{Im}(w)$.
- ***b)*** Préciser $v \circ w$ et $w \circ v$.
- ***c)*** Prouver que $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Ker}(v)$ et que $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(w)$.
- ***d)*** Démontrer que $E = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Ker}(w)$.

***4.*** Comment peut-on déterminer une base de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est diagonale ?

***5.* Application**

Dans cette question, $E$ est de dimension trois. On munit $E$ de la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et, dans cette base, on définit l'endomorphisme $u$ par sa matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- ***a)*** Vérifier que $u$ satisfait à la relation ( $\star$ ). On fera apparaître les calculs sur la copie.
- ***b)*** Déterminer les matrices $V$ et $W$ des endomorphismes $v$ et $w$ définis à la question 3.
- ***c)*** Déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de $\mathrm{Ker}(v)$ et une base $\mathscr{B}_2$ de $\mathrm{Ker}(w)$.
- ***d)*** Déterminer une matrice diagonale $D$ et une matrice inversible $P$ telles que $U = PDP^{-1}$.

**Exercice 19** *(E3A 2021 MP)*

Dans tout l'exercice, $n$ est un entier naturel non nul.

Soit $\varphi$ l'application qui à tout polynôme $P$ de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt$.

***6.*** Démontrer que $\mathscr{B} = (1, X-1, X(X-1), \ldots, X^{n-1}(X-1))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

***7.* Généralités sur $\varphi$.**

- ***a)*** Démontrer que $\varphi$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
- ***b)*** Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$ et la dimension du noyau de $\varphi$.

***8.*** On considère alors l'application $\psi$ qui à tout polynôme $P$ de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme $Q$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_0^x P(t)dt.$$

- ***a)*** Justifier que l'application $\psi$ est linéaire.
- ***b)*** Démontrer que $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}\left(X, X^2, \ldots, X^{n+1}\right)$.
- ***c)*** Démontrer que : $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \psi(P) \in \mathrm{Vect}\left(X(X-1), \ldots, X^n(X-1)\right)$.
- ***d)*** Donner alors une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

***9.*** On note $\mathcal{H} = \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.

- ***a)*** Donner la dimension de $\mathcal{H}$.
- ***b)*** Pour $k \in [\![0, n]\!]$, soit $\psi_k$ la forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme $P$ de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

  Démontrer que la famille $(\psi_0, \ldots, \psi_n)$ est une base de $\mathcal{H}$.
- ***c)*** Déterminer les composantes de $\varphi$ dans cette base.

**Exercice 20** *(E3A 2022 PSI)*

Soient $n$ un entier naturel non nul et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

***10.*** Soient $q$ un réel et $r$ un entier naturel non nul. Donner, sans démonstration, une autre expression de $\sum\limits_{k=0}^{r} q^k$.

***11.*** Soit $p$ un entier naturel non nul.
Déterminer, dans $\mathbb{R}[X]$, le reste et le quotient de la division euclidienne de $X^p - 1$ par $X - 1$.

***12.*** Soit $P \in E_n$.
Montrer qu'il existe un polynôme $Q$ de $E_n$ tel que :

$$\forall x \neq 1, \quad Q(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x P(t)\ dt.$$

On définit ainsi une application $f : P \mapsto Q$.

***13.*** Prouver que $f$ est un endomorphisme de $E_n$.

***14.*** Montrer que $f$ est un automorphisme de $E_n$ et déterminer, pour tout $Q$ de $E_n$, le polynôme $f^{-1}(Q)$ à l'aide de $Q$ et de ses dérivées.

***15.*** Soit $A$ la matrice de $f$ dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $E_n$.
Déterminer $A$ et $A^{-1}$.

***16.*** Déterminer les spectres des matrices $A$ et $A^{-1}$.

***17.*** Les matrices $A$ et $A^{-1}$ sont-elles diagonalisables ?

***18.*** Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine d'ordre de multiplicité $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ d'un polynôme $Q$ de $E_n$.
À quelles conditions $\alpha$ est-il racine de $f^{-1}(Q)$ et avec quel ordre de multiplicité ?
*On pourra étudier les cas $\alpha = 1$ et $\alpha \neq 1$.*

***19.*** Déterminer les sous-espaces propres de $f^{-1}$.

***20.*** Montrer que les sous-espaces propres de $f^{-1}$ sont aussi les sous-espaces propres de $f$.

**Exercice 21** *(E3A 2020 PC)*

***21.*** Soient $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $M \neq I_n$ et $M\ neq \frac{1}{2} I_n$, vérifiant la relation :

$$2M^2 = 3M - I_n$$

- ***a)*** On note $F = \text{Vect}\left(I_n, M, M^2\right)$. Prouver que $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k \in F$.
  Déterminer la dimension de $F$ et en donner une base.
- ***b)*** Vérifier que $F$ est stable pour la multiplication des matrices.
- ***c)*** Soient $A = M - I_n$ et $B = M - \frac{1}{2} I_n$.
  Justifier que $\mathscr{B} = (A, B)$ constitue une base de $F$.
  Déterminer les composantes des matrices $AB$, $BA$, $A^2$ et $B^2$ dans la base $\mathscr{B}$.
- ***d)*** Déterminer toutes les matrices $T$ de $F$ vérifiant $T^2 = M$.

***22.*** Soit $X$ une variable aléatoire réelle telle que l'on a :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad 2\mathbb{P}\big(\{X = n+2\}\big) = 3\mathbb{P}\big(\{X = n+1\}\big) - \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)$$

- ***a)*** On note $p_n = \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)$. Exprimer $p_n$ en fonction de $n$. En déduire la loi de la variable aléatoire $X$.
- ***b)*** Justifier que la variable aléatoire $X$ possède une espérance et une variance et les calculer.

**Exercice 22** *(E3A 2022 PC)*

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 3.

On note $E_n = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ sa base canonique.

On considère les endomorphismes $f$ et $g$ de $E_n$ définis par :

$$\left( f(e_1) = \sum_{n}^{i=1} e_i \text{ et } \forall j \in [\![2, n]\!], f(e_j) = e_1 + e_j \right) \text{ et } (g = f - id_{E_n})$$

***23.*** Donner, dans la base $\mathscr{B}$, $F$ et $G$ les matrices respectives des endomorphismes $f$ et $g$.

***24.*** Justifier que $f$ et $g$ sont diagonalisables.

***25.*** **Diagonalisation de $f$ et de $g$ dans une même base**

- ***a)*** Déterminer la base $\mathscr{B}_1$ de $\mathrm{Im}(g)$, le rang de $g$ et une base $\mathscr{B}_2$ de $\mathrm{Ker}(g)$.
- ***b)*** Montrer que $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ sont supplémentaires orthogonaux dans $E_n$.
- ***c)*** Démontrer que le spectre de l'endomorphisme $g$ est : $\mathrm{Sp}(g) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$ où les deux réels $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont non nuls et vérifient la relation $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. On choisira $\lambda_1 > 0$.
- ***d)*** On se propose de déterminer $\lambda_1$ et $\lambda_2$ par deux méthodes :
  - ***(A)*** **Méthode 1**
    - ***(i)*** Démontrer que $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ sont stables par $g$.
    - ***(ii)*** Déterminer la matrice $H$ dans la base $\mathscr{B}_1$ de l'endomorphisme $h$ de $\mathrm{Im}(g)$ induit par $g$.
    - ***(iii)*** Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres associés de $h$.
    - ***(iv)*** En déduire, en le justifiant soigneusement, les valeurs de $\lambda_1$ et $\lambda_2$.
  - ***(B)*** **Méthode 2**
    - ***(i)*** Montrer que le spectre de $g^2 = g \circ g$ est : $\mathrm{Sp}\left(g^2\right) = \{0, \lambda_1^2, \lambda_2^2\}$.
    - ***(ii)*** Déterminer la matrice de l'endomorphisme $g^2$ dans la base $\mathscr{B}$.
    - ***(iii)*** En déduire, en fonction de $n$, la valeur de $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$.
    - ***(iv)*** Retrouver alors les valeurs de $\lambda_1$ et $\lambda_2$ obtenues par la méthode 1.
- ***e)*** Déterminer une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ sous la forme $P = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & * \\ 1 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \\ 1 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$ telle que $P^{-1}GP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0, \cdots, 0)$. On ne demande pas de déterminer $P^{-1}$.
- ***f)*** Justifier que la matrice $P^{-1}FP$ est diagonale.

***26.*** Résoudre pour $t$ réel, le système différentiel : $X'(t) = FX(t) + tU$ où $U$ est la première colonne de la matrice $P$.

**Exercice 23** *(E3A 2021 PSI)*

On note $F$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $J = ]-1, +\infty[$ à valeurs réelles.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![-1, p]\!]$, on définit les fonctions $f_k$ sur $J$ par :

$$\forall x \in J,\ f_{-1}(x) = \ln(1+x) \text{ et } \forall k \in [\![0, p]\!]\ f_k(x) = \frac{1}{(1+x)^k}$$

*1.* **Etude du sous-espace vectoriel engendré par ces fonctions**

*a)* Soit $(a_k)_{k \in [\![-1,p]\!]}$ des réels tels que $\sum\limits_{k=-1}^{p} a_k f_k$ est la fonction nulle.
Démontrer que $a_{-1} = 0$.

*b)* Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (f_k)_{k \in [\![-1,p]\!]}$ est libre.
On note $E = \text{Vect}(\mathscr{B})$.

*c)* En déduire la dimension de $E$.

*2.* On note $u$ l'application qui à toute fonction de $E$ associe la fonction $g$ définie sur $J$ par :

$$\forall x \in J,\ g(x) = (1+x) f'(x)$$

*a)* Déterminer, pour $k \in [\![-1, p]\!]$, les images de $f_k$ par $u$.

*b)* Vérifier que $u$ est un endomorphisme de $E$.

*c)* Déterminer le noyau et l'image de $u$.

*d)* Préciser $u^{-1}(\{f_{-1}\})$, l'ensemble des antécédents de $f_{-1}$.

*e)* Déterminer la matrice $M$ de $u$ dans la base $\mathscr{B}$.

*f)* L'endomorphisme $u$ est-il diagonalisable ?

*g)* L'endomorphisme $u^2$ est il diagonalisable ?

*3.* Résoudre sur $J$ l'équation différentielle $(ED)$ : $f_{-1}(t) = (1+t)\, y'(t)$.

*4.* Soit $h_2$ la solution de l'équation différentielle $(ED)$ nulle en 0.

*a)* On note $h_3$ la solution de l'équation différentielle $h_2(t) = (1+t)\, y'(t)$ nulle en 0.
Expliciter $h_3$.

*b)* En itérant le procédé, pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, on note $h_k$ la solution nulle en 0 de l'équation différentielle $h_{k-1}(t) = (1+t)\, y'(t)$.
Expliciter $h_k$.

*5.* **Etude de la série de fonction $\sum\limits_{k \geqslant 2} h_k$**

*a)* Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{k \geqslant 2} h_k$ converge simplement sur $J$ et calculer sa somme $H$.

*b)* La fonction $H$ est-elle dans $E$ ?

*c)* En utilsant la question 5.1. vérifier que $H$ est dérivable et que $H' \in E$.

**Exercice 24** *(E3A 2019 - PSI 1)*

- Dans tout l'exercice, on identifie $\mathbb{R}[X]$ à l'ensemble des fonctions polynomiales.
- On note $\mathscr{E}$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $\mathscr{E} = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Pour tout élément $f$ de $\mathscr{E}$, on note $U(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ U(f)(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)\ dt$$

***1.*** Soit $f \in \mathscr{E}$, $T$-périodique. Montrer : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\ dt = \int_0^T f(t)\ dt$.

***2.*** On suppose de plus dans cette question que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que si $f$ est $T$-périodique, il en est de même pour $f'$.

Montrer que la réciproque est fausse.

***3.*** Montrer que la fonction $U(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

***4.*** Montrer que l'application $U$ qui à $f \in \mathscr{E}$ associe $U(f)$ est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.

***5.*** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathscr{B}_n = (1, X, \ldots, X^n)$ sa base canonique.

***a)*** Montrer que la restriction de $U$ à $E_n$ définit un endomorphisme $U_n$ de $E_n$.

***b)*** Écrire la matrice de $U_n$ dans la base $\mathscr{B}_n$.

***c)*** L'endomorphisme $U_n$ est-il bijectif ? diagonalisable ?

***6.*** Justifier que, si $f$, élément de $\mathscr{E}$, est dans $\mathrm{Ker}(U)$, alors :

***(i)*** $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt = 0$.

***(ii)*** $f$ est périodique de période 1.

***7.*** A-t-on : $\mathrm{Ker}(U) = \left\{ f \in \mathscr{E},\ \text{périodique de période 1 et telle que } \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt = 0 \right\}$ ?

***8.*** Donner explicitement une fonction $f$ non nulle, élément de $\mathrm{Ker}(U)$ et en donner une représentation graphique sur l'intervalle $[-1, 2]$.

***9.*** L'endomorphisme $U$ est-il surjectif ?

***10.*** Soient $a$ un réel non nul et $f_a$ la fonction sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$.

***a)*** Déterminer $F_a = U(f_a)$.

***b)*** Dresser le tableau des variations de la fonction réelle : $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$.

***c)*** Montrer alors que tout réel $\lambda$ strictement positif est valeur propre de l'endomorphisme $U$.

**Exercice 25** *(E3A 2019 - PSI 1)*

- Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $E_n = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{B} = \Big((E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\Big)$ sa base canonique.
- On rappelle que $\forall\,(r,t,u,v) \in [\![1,n]\!]^4$, $E_{r,t} \times E_{u,v} = \begin{cases} O_n & \text{lorsque } t \neq u \\ E_{r,v} & \text{lorsque } t = u \end{cases}$.
- Si $M \in E_n$, on notera dans tout l'exercice, $\mathrm{tr}(M)$ la trace de la matrice $M$ et $M^T$ la matrice transposée de la matrice $M$.
- On dira qu'une matrice $M$ de $E_n$ est **nilpotente** s'il existe un entier naturel $r$ non nul tel que : $M^r = O_n$. Par exemple, la matrice $E_{1,2}$ de $\mathscr{B}$ est nilpotente.
- On rappelle que l'application qui à tout couple de matrices $(A,B)$ de $E_n$ associe $(A \mid B) = \mathrm{tr}(A^T B)$ définit un produit scalaire sur $E_n$.
- On dira qu'un sous-espace vectoriel $V$ de $\mathbb{R}^n$ est **stable pour une matrice** $A$ de $E_n$ si : $\forall X \in V$, $AX \in V$.

* * *

Soit $H$ un hyperplan de $E_n$. On veut montrer que $H$ contient au moins une matrice inversible de $E_n$.

***11.*** Soit $T$ une matrice n'appartenant pas à $H$. Justifier que l'on a : $E_n = H \oplus \mathrm{Vect}\,(T)$.

***12.*** Déterminer les matrices nilpotentes de la base canonique $\mathscr{B}$.

***13.*** Déterminer les valeurs propres d'une matrice nilpotente.

***14.*** On note $U = \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} (E_{i,j} + E_{j,i})$. Démontrer que $U$ est inversible.

***15.*** <u>On suppose alors que $H$ ne contient pas de matrice inversible</u>.
Soit $N$ une matrice nilpotente de $E_n$

- ***a)*** Justifier l'existence d'une matrice $A \in H$ et d'un scalaire $\alpha$ tels que : $N = A + \alpha I_n$.
- ***b)*** Justifier que 0 est valeur propre de $A$ et prouver que $N \in H$.

***16.*** Montrer que $H$ contient au moins une matrice inversible.

| |
|---|
| On suppose maintenant et jusqu'à la fin de l'exercice que $H$ est stable pour la multiplication des matrices, c'est-à-dire : $\forall (A,B) \in H^2, AB \in H$. |

***17.*** On prend $n = 2$. Exhiber un hyperplan de $E_2$ stable pour la multiplication des matrices.

***18.*** On se propose de montrer que $I_n \in H$ et on raisonne par l'absurde en supposant que $I_n \notin H$.

- ***a)*** On note $p$ la projection sur $\mathrm{Vect}\,(I_n)$ parallèlement à $H$.
  Prouver : $\forall (M,N) \in E_n^2$, $p(MN) = p(M)p(N)$.
- ***b)*** Démontrer l'implication suivante : $M^2 \in H \Rightarrow M \in H$.
- ***c)*** Prouver alors : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $E_{i,j} \in H$.
- ***d)*** Conclure.