

Colles

semaine 9 : 04 novembre - 09 novembre

I. Questions de cours

Exercice 1

Image d'une application linéaire en dimension finie. Énoncé et démonstration.

Exercice 2

Application réciproque d'un isomorphisme. Énoncé et démonstration.

Exercice 3

1. Soit E est un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

a) Démontrer : $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$.

b) Démontrer : $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.

2. Démontrer que l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\mapsto X P'(X) - X^2 P'(X) \end{aligned}$$

est un endomorphisme.

II. Autres exercices

Exercice 4

Pour tout $P \in E = \mathbb{R}_n[X]$, on note $(\varphi(P))(X) = P(X + 1)$.

1. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique.

2. Déterminer φ^{-1} ainsi que la matrice de φ^{-1} dans la base canonique.

Exercice 5

Soient A la matrice dont la dernière ligne et la dernière colonne valent $(1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n)$, avec des 0 partout ailleurs, et f un endomorphisme représenté par A .

1. Quel est le rang de f ?

2. Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires.

3. Écrire la matrice de f dans une base adaptée à $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Exercice 6

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $A^2 = 0$, et soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à A .

1. Montrer que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$, et préciser la dimension de ces deux sous-espaces.

2. Montrer que A est semblable à la matrice élémentaire $E_{1,2}$.

3. Pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note : $C_B = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MB\}$.

a) Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que C_B est un espace vectoriel.

b) Déterminer $C_{E_{1,2}}$.

c) En déduire la dimension de C_A .

Exercice 7

Soient E est un espace vectoriel de dimension finie, p et q des projecteurs de E .

Montrer l'équivalence : $\text{Ker}(p) = \text{Ker}(q) \Leftrightarrow p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.

Exercice 8

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour tout vecteur $x \neq 0_E$ de E , il existe une forme linéaire φ sur E telle que $\varphi(x) = 1$.

2. a) Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} \theta &: E \rightarrow \mathbb{K}^n \\ x &\mapsto (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

b) En déduire l'existence d'une base $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ de E telle que : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \varphi_j(e_i) = \delta_{i,j}$.

3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient f_1, \dots, f_p des formes linéaires de E .

On note $F = \text{Vect}(f_1, \dots, f_p)$ et $q = \dim(F)$.

On considère alors une forme linéaire g qui vérifie :

$$\forall x \in E, (f_1(x) = \dots = f_p(x) = 0) \Rightarrow (g(x) = 0)$$

Démontrer : $g \in F$.

Exercice 9

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère deux endomorphismes f et g de E vérifiant :

× $\text{rg}(f) \geq 2$,

× pour tout $x \in E$, la famille $(f(x), g(x))$ est liée.

Le but est de montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{K}$ tel que : $f = \gamma \cdot g$.

1. a) Justifier qu'il existe G , sous-espace vectoriel de E tel que : $E = G \oplus \text{Ker}(g)$.

b) Justifier que la restriction de g à G (notée $g|_G$ est une application injective.

On rappelle que $g|_G$ est l'application linéaire définie par :

$$\begin{aligned} g|_G &: G \rightarrow E \\ x &\mapsto g(x) \end{aligned}$$

2. On considère $(u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n)$ une base adaptée à la décomposition précédente où $r = \dim(G)$.

a) On définit la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ par :

$$\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, e_i = u_i \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket r+1, n \rrbracket, e_i = u_i + u_2$$

Démontrer que \mathcal{B} est une base de E .

b) Démontrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la famille $(g(e_1), g(e_i))$ est libre.

3. a) Démontrer précisément que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $\gamma_i \in \mathbb{K}$ tel que : $f(e_i) = \gamma_i g(e_i)$.

b) Que faut-il démontrer pour conclure ?

c) Conclure.

On pourra s'inspirer du point précédent et considérer le vecteur $e_1 + e_i$ pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$

Exercice 10

On note $E = \mathbb{K}[X]$ et on considère l'endomorphisme φ de E défini par :

$$\varphi(P) = P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(1 - \frac{X}{2}\right) - 2P(X)$$

1. a) Déterminer le degré de $\varphi(P)$ en fonction du degré du polynôme P .

b) Déterminer $\text{Ker}(\varphi)$.

2. On note $Q_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n = \varphi(X^n)$.

a) Montrer que la famille $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de E .

b) Montrer que $\text{Im}(\varphi)$ est un hyperplan de E .

3. On considère la forme linéaire θ sur E définie par $\theta(P) = \int_0^1 P(t) dt$.

Montrer : $\text{Im}(\varphi) = \text{Ker}(\theta)$.

Exercice 11

Soit E un espace vectoriel de dimension $2p$.

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

(i) $\varphi^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\text{rg}(\varphi) = p$;

(ii) $\text{Ker}(\varphi) = \text{Im}(\varphi)$;

(iii) il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $A \in GL_p(\mathbb{K})$.

Exercice 12

Soit $A = \text{diag}(1, \dots, n)$.

Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec A .

Montrer que cet ensemble est $\mathbb{R}_{n-1}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}$.

Exercice 13

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel (de dimension finie).

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit p un projecteur de E .

Montrer l'équivalence entre :

(i) f et p commutent,

(ii) f stabilise $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$.

Exercice 14

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit X une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = A$.

Montrer que X et A commutent, puis que X est triangulaire supérieure.

2. Trouver toutes les matrices X telles que $X^2 = A$.

Énoncés E3A

Exercice 15 (E3A 2024 PC)

Soit n un entier naturel non nul.

On note $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à $2n$. Pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, on note $e_k = X^k$ et $\mathcal{B} = (e_0, \dots, e_{2n})$ la base canonique de E .

Pour tout couple de polynômes (P, Q) de E^2 , on pose $\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$ et on rappelle que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

Soit L l'application définie sur E par :

$$\forall P \in E, L(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt$$

1. Montrer que L est une forme linéaire sur E .
2. Déterminer $L(e_k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$.
3. Déterminer la dimension de $\text{Ker}(L)$.
4. Prouver qu'il existe une base \mathcal{U} , que l'on ne cherchera pas à expliciter, de $\text{Ker}(L)$, dont le premier vecteur est e_1 .
5. Montrer :
 - a) $\text{Vect}(e_0)$ et $\text{Ker}(L)$ sont deux sous-espaces orthogonaux,
 - b) $E = \text{Vect}(e_0) \oplus \text{Ker}(L)$.
6. Soit λ un réel. On considère l'application T_λ définie sur E par :

$$\forall P \in E, T_\lambda(P) = P + \lambda L(P)X$$

- a) Vérifier que T_λ est un endomorphisme de E .
- b) Soit $P \in E$. Calculer $(L \circ T_\lambda)(P)$.
- c) Déterminer la matrice de T_λ dans une base de E adaptée à la décomposition obtenue aux questions 4 et 5.
- d) Déterminer les valeurs propres de T_λ .
- e) L'endomorphisme T_λ est-il diagonalisable?
- f) Justifier que T_λ est un automorphisme de E .
- g) Pour tous réels α et β , préciser $T_\alpha \circ T_\beta$.
- h) Déterminer T_λ^{-1} .

Exercice 16 (E3A 2024 MP)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^\top = 3A^2 - A - I_n$ où A^\top désigne la matrice transposée de la matrice A .

7. Démontrer que la matrice $B = 3A^3 - A^2 - A$ est symétrique réelle.

8. Montrer que les valeurs propres de B sont réelles, positives ou nulles.

On pourra étudier le signe de $Y^\top B Y$ pour un vecteur Y de \mathbb{R}^n .

9. Montrer que l'on a : $A = 3(A^\top)^2 - A^\top - I_n$.

10. En déduire que le polynôme $P(X) = (3X^2 - X - 1)^2 - X^2$ est annulateur de la matrice A .

11. Déterminer un polynôme unitaire annulateur de A^\top .

12. Factoriser P en un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

13. La matrice A est-elle inversible ?

14. Établir que la matrice A est diagonalisable et préciser ses valeurs propres possibles.

15. Soit λ une valeur propre de A et V un vecteur propre associé.

Montrer que V est aussi vecteur propre de A^\top .

On note $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les racines du polynôme P .

On appelle $\mathcal{L} = (L_1, L_2, L_3, L_4)$ la famille des polynômes de Lagrange associés à cette famille de scalaires, c'est-à-dire les polynômes $(L_i)_{i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket}$ de $\mathbb{R}_3[X]$, espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels, tels que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket^2, \quad L_i(\alpha_j) = \delta_{i,j} \quad \text{où } \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{symbole de Kronecker}).$$

16. a) Déterminer L_1 sous forme d'un produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

b) Vérifier que \mathcal{L} est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

c) Soit $R \in \mathbb{R}_3[X]$. Déterminer les coordonnées du polynôme R dans la base \mathcal{L} .

17. **Étude des puissances de A**

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

(i) Exprimer le reste de la division euclidienne de X^k par le polynôme P dans la base \mathcal{L} .

(ii) En déduire une expression de A^k .

b) Démontrer que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice de projection.

Exprimer cette matrice à l'aide de la matrice A et des $(L_i)_{i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket}$.

Exercice 17 (E3A 2023 PC)

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et u un endomorphisme de E , tel que :

$$u^2 - 3u + 2\text{id}_E = 0$$

où 0 désigne l'endomorphisme nul $0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
2. Déterminer les valeurs propres possibles α et β de l'endomorphisme u . On choisira α inférieure à β .
3. On pose alors $v = u - \alpha\text{id}_E$ et $w = u - \beta\text{id}_E$.
 - a) Déterminer l'endomorphisme $v - w$ et en déduire que $E = \text{Im}(v) + \text{Im}(w)$.
 - b) Préciser $v \circ w$ et $w \circ v$.
 - c) Prouver que $\text{Im}(w) \subset \text{Ker}(v)$ et que $\text{Im}(v) \subset \text{Ker}(w)$.
 - d) Démontrer que $E = \text{Ker}(v) \oplus \text{Ker}(w)$.
4. Comment peut-on déterminer une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale ?
5. **Application**

Dans cette question, E est de dimension trois. On munit E de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et, dans cette

base, on définit l'endomorphisme u par sa matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) Vérifier que u satisfait à la relation (\star) . On fera apparaître les calculs sur la copie.
- b) Déterminer les matrices V et W des endomorphismes v et w définis à la question 3.
- c) Déterminer une base \mathcal{B}_1 de $\text{Ker}(v)$ et une base \mathcal{B}_2 de $\text{Ker}(w)$.
- d) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $U = PDP^{-1}$.

Exercice 18 (E3A 2021 MP)

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.

Soit φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \int_0^1 P(t) dt$.

6. Démontrer que $\mathcal{B} = (1, X - 1, X(X - 1), \dots, X^{n-1}(X - 1))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
7. **Généralités sur φ .**
 - a) Démontrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
 - b) Déterminer $\text{Im}(\varphi)$ et la dimension du noyau de φ .
8. On considère alors l'application ψ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme Q tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_0^x P(t) dt.$$

- a) Justifier que l'application ψ est linéaire.
- b) Démontrer que $\text{Im}(\psi) = \text{Vect}(X, X^2, \dots, X^{n+1})$.
- c) Démontrer que $P \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \psi(P) \in \text{Vect}(X(X - 1), \dots, X^n(X - 1))$.
- d) Donner alors une base de $\text{Ker}(\varphi)$.
9. On note $\mathcal{H} = \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.
 - a) Donner la dimension de \mathcal{H} .
 - b) Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, soit ψ_k la forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\frac{P^{(k)}(0)}{k!}$.
Démontrer que la famille (ψ_0, \dots, ψ_n) est une base de \mathcal{H} .
 - c) Déterminer les composantes de φ dans cette base.

Exercice 19 (E3A 2022 PSI)

Soient n un entier naturel non nul et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

10. Soient q un réel et r un entier naturel non nul. Donner, sans démonstration, une autre expression de $\sum_{k=0}^r q^k$.
11. Soit p un entier naturel non nul.
Déterminer, dans $\mathbb{R}[X]$, le reste et le quotient de la division euclidienne de $X^p - 1$ par $X - 1$.
12. Soit $P \in E_n$.
Montrer qu'il existe un polynôme Q de E_n tel que :

$$\forall x \neq 1, \quad Q(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x P(t) dt.$$

On définit ainsi une application $f : P \mapsto Q$.

13. Prouver que f est un endomorphisme de E_n .
14. Montrer que f est un automorphisme de E_n et déterminer, pour tout Q de E_n , le polynôme $f^{-1}(Q)$ à l'aide de Q et de ses dérivées.
15. Soit A la matrice de f dans la base canonique \mathcal{B} de E_n .
Déterminer A et A^{-1} .
16. Déterminer les spectres des matrices A et A^{-1} .
17. Les matrices A et A^{-1} sont-elles diagonalisables ?
18. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine d'ordre de multiplicité $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ d'un polynôme Q de E_n .
À quelles conditions α est-il racine de $f^{-1}(Q)$ et avec quel ordre de multiplicité ?
On pourra étudier les cas $\alpha = 1$ et $\alpha \neq 1$.
19. Déterminer les sous-espaces propres de f^{-1} .
20. Montrer que les sous-espaces propres de f^{-1} sont aussi les sous-espaces propres de f .

Exercice 20 (E3A 2020 PC)

21. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \neq I_n$ et M neq $\frac{1}{2} I_n$, vérifiant la relation :

$$2M^2 = 3M - I_n$$

- a) On note $F = \text{Vect}(I_n, M, M^2)$. Prouver que $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k \in F$.
Déterminer la dimension de F et en donner une base.
- b) Vérifier que F est stable pour la multiplication des matrices.
- c) Soient $A = M - I_n$ et $B = M - \frac{1}{2}I_n$.
Justifier que $\mathcal{B} = (A, B)$ constitue une base de F .
Déterminer les composantes des matrices AB , BA , A^2 et B^2 dans la base \mathcal{B} .
- d) Déterminer toutes les matrices T de F vérifiant $T^2 = M$.
22. Soit X une variable aléatoire réelle telle que l'on a :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad 2\mathbb{P}(\{X = n + 2\}) = 3\mathbb{P}(\{X = n + 1\}) - \mathbb{P}(\{X = n\})$$

- a) On note $p_n = \mathbb{P}(\{X = n\})$. Exprimer p_n en fonction de n . En déduire la loi de la variable aléatoire X .
- b) Justifier que la variable aléatoire X possède une espérance et une variance et les calculer.

Exercice 21 (E3A 2022 PC)

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

On note $E_n = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ sa base canonique.

On considère les endomorphismes f et g de E_n définis par :

$$\left(f(e_1) = \sum_{i=1}^{i=1} e_i \text{ et } \forall j \in \llbracket 2, n \rrbracket, f(e_j) = e_1 + e_j \right) \text{ et } (g = f - id_{E_n})$$

23. Donner, dans la base \mathcal{B} , F et G les matrices respectives des endomorphismes f et g .

24. Justifier que f et g sont diagonalisables.

25. Diagonalisation de f et de g dans une même base

a) Déterminer la base \mathcal{B}_1 de $\text{Im}(g)$, le rang de g et une base \mathcal{B}_2 de $\text{Ker}(g)$.

b) Montrer que $\text{Im}(g)$ et $\text{Ker}(g)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E_n .

c) Démontrer que le spectre de l'endomorphisme g est : $\text{Sp}(g) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$ où les deux réels λ_1 et λ_2 sont non nuls et vérifient la relation $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. On choisira $\lambda_1 > 0$.

d) On se propose de déterminer λ_1 et λ_2 par deux méthodes :

(A) Méthode 1

(i) Démontrer que $\text{Im}(g)$ et $\text{Ker}(g)$ sont stables par g .

(ii) Déterminer la matrice H dans la base \mathcal{B}_1 de l'endomorphisme h de $\text{Im}(g)$ induit par g .

(iii) Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres associés de h .

(iv) En déduire, en le justifiant soigneusement, les valeurs de λ_1 et λ_2 .

(B) Méthode 2

(i) Montrer que le spectre de $g^2 = g \circ g$ est : $\text{Sp}(g^2) = \{0, \lambda_1^2, \lambda_2^2\}$.

(ii) Déterminer la matrice de l'endomorphisme g^2 dans la base \mathcal{B} .

(iii) En déduire, en fonction de n , la valeur de $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$.

(iv) Retrouver alors les valeurs de λ_1 et λ_2 obtenues par la méthode 1.

e) Déterminer une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ sous la forme $P = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & * \\ 1 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \\ 1 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$ telle que $P^{-1}GP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0, \dots, 0)$. On ne demande pas de déterminer P^{-1} .

f) Justifier que la matrice $P^{-1}FP$ est diagonale.

26. Résoudre pour t réel, le système différentiel : $X'(t) = FX(t) + tU$ où U est la première colonne de la matrice P .

Exercice 22 (E3A 2021 PSI)

On note F l'espace vectoriel des fonctions définies sur $J =]-1, +\infty[$ à valeurs réelles.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \llbracket -1, p \rrbracket$, on définit les fonctions f_k sur J par :

$$\forall x \in J, f_{-1}(x) = \ln(1+x) \text{ et } \forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket f_k(x) = \frac{1}{(1+x)^k}$$

1. Etude du sous-espace vectoriel engendré par ces fonctions

a) Soit $(a_k)_{k \in \llbracket -1, p \rrbracket}$ des réels tels que $\sum_{k=-1}^p a_k f_k$ est la fonction nulle.

Démontrer que $a_{-1} = 0$.

b) Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (f_k)_{k \in \llbracket -1, p \rrbracket}$ est libre.

On note $E = \text{Vect}(\mathcal{B})$.

c) En déduire la dimension de E .

2. On note u l'application qui à toute fonction de E associe la fonction g définie sur J par :

$$\forall x \in J, g(x) = (1+x) f'(x)$$

a) Déterminer, pour $k \in \llbracket -1, p \rrbracket$, les images de f_k par u .

b) Vérifier que u est un endomorphisme de E .

c) Déterminer le noyau et l'image de u .

d) Préciser $u^{-1}(\{f_{-1}\})$, l'ensemble des antécédents de f_{-1} .

e) Déterminer la matrice M de u dans la base \mathcal{B} .

f) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

g) L'endomorphisme u^2 est-il diagonalisable ?

3. Résoudre sur J l'équation différentielle (ED) : $f_{-1}(t) = (1+t) y'(t)$.

4. Soit h_2 la solution de l'équation différentielle (ED) nulle en 0.

a) On note h_3 la solution de l'équation différentielle $h_2(t) = (1+t) y'(t)$ nulle en 0.

Expliciter h_3 .

b) En itérant le procédé, pour tout entier naturel $k \geq 2$, on note h_k la solution nulle en 0 de l'équation différentielle $h_{k-1}(t) = (1+t) y'(t)$.

Expliciter h_k .

5. Etude de la série de fonction $\sum_{k \geq 2} h_k$

a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{k \geq 2} h_k$ converge simplement sur J et calculer sa somme H .

b) La fonction H est-elle dans E ?

c) En utilisant la question 5.1. vérifier que H est dérivable et que $H' \in E$.

Exercice 23 (E3A 2019 - PSI 1)

- Dans tout l'exercice, on identifie $\mathbb{R}[X]$ à l'ensemble des fonctions polynomiales.
- On note \mathcal{E} l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , c'est-à-dire que $\mathcal{E} = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Pour tout élément f de \mathcal{E} , on note $U(f)$ l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, U(f)(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt$$

1. Soit $f \in \mathcal{E}$, T -périodique. Montrer : $\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$.
2. On suppose de plus dans cette question que f est dérivable sur \mathbb{R} .
Démontrer que si f est T -périodique, il en est de même pour f' .
Montrer que la réciproque est fautive.
3. Montrer que la fonction $U(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.
4. Montrer que l'application U qui à $f \in \mathcal{E}$ associe $U(f)$ est un endomorphisme de \mathcal{E} .
5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{B}_n = (1, X, \dots, X^n)$ sa base canonique.
 - a) Montrer que la restriction de U à E_n définit un endomorphisme U_n de E_n .
 - b) Écrire la matrice de U_n dans la base \mathcal{B}_n .
 - c) L'endomorphisme U_n est-il bijectif? diagonalisable?
6. Justifier que, si f , élément de \mathcal{E} , est dans $\text{Ker}(U)$, alors :
 - (i) $\int_0^1 f(t) dt = 0$.
 - (ii) f est périodique de période 1.
7. A-t-on : $\text{Ker}(U) = \left\{ f \in \mathcal{E}, \text{périodique de période 1 et telle que } \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}$?
8. Donner explicitement une fonction f non nulle, élément de $\text{Ker}(U)$ et en donner une représentation graphique sur l'intervalle $[-1, 2]$.
9. L'endomorphisme U est-il surjectif?
10. Soient a un réel non nul et f_a la fonction sur \mathbb{R} par $t \mapsto e^{at}$.
 - a) Déterminer $F_a = U(f_a)$.
 - b) Dresser le tableau des variations de la fonction réelle : $g : x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$.
 - c) Montrer alors que tout réel λ strictement positif est valeur propre de l'endomorphisme U .

Exercice 24 (E3A 2019 - PSI 1)

- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $E_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B} = \left((E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \right)$ sa base canonique.
- On rappelle que $\forall (r, t, u, v) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$, $E_{r,t} \times E_{u,v} = \begin{cases} O_n & \text{lorsque } t \neq u \\ E_{r,v} & \text{lorsque } t = u \end{cases}$.
- Si $M \in E_n$, on notera dans tout l'exercice, $\text{tr}(M)$ la trace de la matrice M et M^T la matrice transposée de la matrice M .
- On dira qu'une matrice M de E_n est **nilpotente** s'il existe un entier naturel r non nul tel que : $M^r = O_n$. Par exemple, la matrice $E_{1,2}$ de \mathcal{B} est nilpotente.
- On rappelle que l'application qui à tout couple de matrices (A, B) de E_n associe $(A | B) = \text{tr}(A^T B)$ définit un produit scalaire sur E_n .
- On dira qu'un sous-espace vectoriel V de \mathbb{R}^n est **stable pour une matrice** A de E_n si : $\forall X \in V$, $AX \in V$.

* * *

Soit H un hyperplan de E_n . On veut montrer que H contient au moins une matrice inversible de E_n .

11. Soit T une matrice n'appartenant pas à H . Justifier que l'on a : $E_n = H \oplus \text{Vect}(T)$.

12. Déterminer les matrices nilpotentes de la base canonique \mathcal{B} .

13. Déterminer les valeurs propres d'une matrice nilpotente.

14. On note $U = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (E_{i,j} + E_{j,i})$. Démontrer que U est inversible.

15. On suppose alors que H ne contient pas de matrice inversible.

Soit N une matrice nilpotente de E_n

a) Justifier l'existence d'une matrice $A \in H$ et d'un scalaire α tels que : $N = A + \alpha I_n$.

b) Justifier que 0 est valeur propre de A et prouver que $N \in H$.

16. Montrer que H contient au moins une matrice inversible.

On suppose maintenant et jusqu'à la fin de l'exercice que H est stable pour la multiplication des matrices, c'est-à-dire : $\forall (A, B) \in H^2$, $AB \in H$.

17. On prend $n = 2$. Exhiber un hyperplan de E_2 stable pour la multiplication des matrices.

18. On se propose de montrer que $I_n \in H$ et on raisonne par l'absurde en supposant que $I_n \notin H$.

a) On note p la projection sur $\text{Vect}(I_n)$ parallèlement à H .

Prouver : $\forall (M, N) \in E_n^2$, $p(MN) = p(M)p(N)$.

b) Démontrer l'implication suivante : $M^2 \in H \Rightarrow M \in H$.

c) Prouver alors : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $E_{i,j} \in H$.

d) Conclure.

Théorème de convergence dominée**Exercice 25**

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}} dt$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 26

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$.

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. La série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n I_n$ est-elle convergente?

Exercice 27

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \frac{e^{-x}}{1+n^2 x^2}$ et $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$.
2. Soit $a \in]0, 1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, 1]$?
3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?
4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Théorème d'intégration terme à terme**Exercice 28**

1. Soient a et b deux réels donnés avec $a < b$.
Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles.

Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f , alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x) dx$.

2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
3. Démontrer : $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n}$.

Exercice 29

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto t^n \ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$ et calculer $I_n = \int_0^1 t^n \ln(t) dt$
2. Démontrer que $f : t \mapsto e^t \ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$ et : $\int_0^1 e^t \ln(t) dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n n!}$.

Exercice 30

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : t \mapsto \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t}$.

1. a) Justifier que la suite (a_n) est bornée.

b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

On admet, dans la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

2. a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} g_n(t) dt$.

En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$.

b) Démontrer : $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 31

On souhaite justifier l'existence et déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(\sqrt{x})} dx$.

1. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\operatorname{sh}(\sqrt{x})}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

2. Démontrer : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(\sqrt{x})} dx = \int_1^0 \frac{2}{t - \frac{1}{t}} \frac{2 \ln(t)}{t} dt$.

3. a) Calculer $\int_0^1 | -t^{2n} \ln(t) | dt$.

b) Démontrer : $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \frac{\pi^2}{2}$.

(on pourra utiliser : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$)

Exercice 32

1. Démontrer : $\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t} dt = - \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$.

2. En déduire : $\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

Exercice 33

Pour $x > 1$, on note : $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Montrer :

$$\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$$

Intégrales à paramètres**Exercice 34**

On note, pour tout $x \in]0, +\infty[$, pour tout $t \in [0, +\infty[$, $f(x, t) = e^{-t} t^{x-1}$.

1. Démontrer : $\forall x \in]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On pose alors : $\forall x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

2. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.

3. Démontrer que Γ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Exercice 35

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

2. Démontrer que la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

3. a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.

b) Résoudre (E) .

Exercice 36

On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t} dt$

1. Démontrer que F est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

2. Démontrer que $x \mapsto x F(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.

3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.