DM1

Exercice 1
On considère dans cet exercice une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et décroissante sur $]0, +\infty[$.

1. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\ dt \leqslant f(k)$.

Faire apparaître sur une même représentation graphique ces trois quantités sous forme d'aires.
(cela ne constitue pas une démonstration)

2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leqslant \int_1^{n+1} f(t)\ dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k)$.

3. En déduire : $\forall n \geqslant 2,\ \displaystyle\int_1^{n+1} f(t)\ dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^{n} f(t)\ dt$.

4. **Application**. Déduire de ce qui précède : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 2
Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Le but de cet exercice est de déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\,\big(\ln(n)\big)^{\beta}}$.

Dans la suite, on note $f : t \mapsto \dfrac{1}{t\,\big(\ln(t)\big)^{\beta}}$.

1. **Cas** $\beta < 0$.
Conclure ce cas en utilisant un théorème de comparaison des séries à termes positifs.

2. **Cas** $\beta \geqslant 0$.

a) Démontrer que la fonction f est décroissante sur $]1, +\infty[$.

b) **Cas** $\beta \leqslant 1$.

(i) Démontrer : $\forall n \geqslant 2,\ \displaystyle\sum_{k=2}^{n} f(k) \geqslant \int_2^{n+1} f(t)\ dt$.

(ii) Calculer l'intégrale.
(on pourra distinguer le cas $\beta = 1$ et $\beta < 1$)

(iii) Conclure ce cas.

c) **Cas** $\beta > 1$.

(i) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leqslant f(2) + \int_2^{n+1} f(t)\ dt$.

(ii) En déduire que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} f(k)\right)_{n\geqslant 2}$ est bornée.

(iii) Conclure ce cas.

Exercice 3
Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$.

Démontrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall x_0 \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\ dt$$