DM1

Exercice 1
On considère dans cet exercice une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et décroissante sur $]0, +\infty[$.

1. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \; f(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\, dt \leqslant f(k)$.

Faire apparaître sur une même représentation graphique ces trois quantités sous forme d'aires. *(cela ne constitue pas une démonstration)*

Démonstration.
Soit $k \geqslant 1$.
Soit $t \in [k, k+1]$. Autrement dit :

$$k \leqslant t \leqslant k+1$$

Comme f est décroissante, on a :

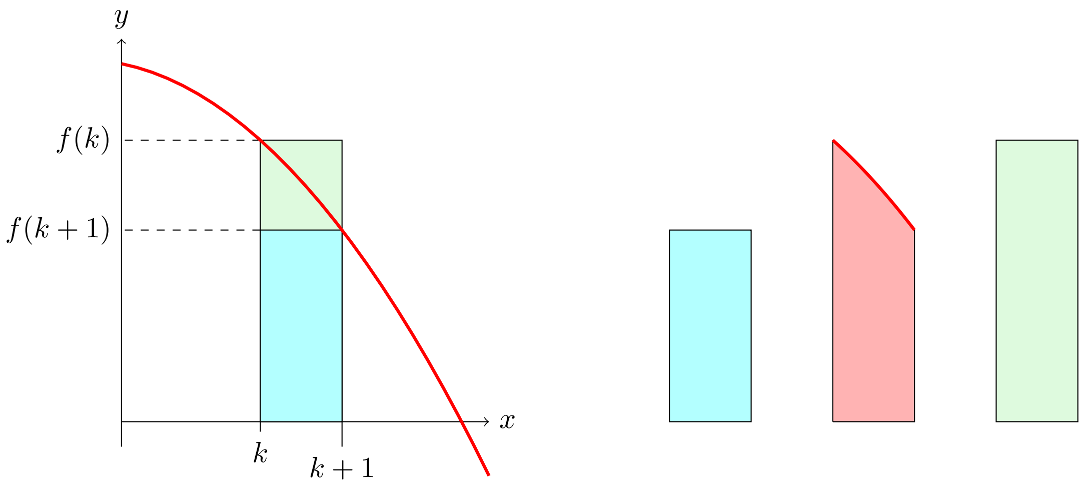
$$f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$$

Les bornes étant dans l'ordre croissant ($k \leqslant k+1$), on obtient par croissance de l'intégrale :

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\, dt \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\, dt \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\, dt$$

$$f(k+1) = \big((\cancel{k}+1) - \cancel{k}\big)\, f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)\, dt \qquad \int_k^{k+1} f(k)\, dt = \big((\cancel{k}+1) - \cancel{k}\big)\, f(k) = f(k)$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \; f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\, dt \leqslant f(k)}$$



$f(k+1)$ $\quad$ $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\, dt$ $\quad$ $f(k)$

□

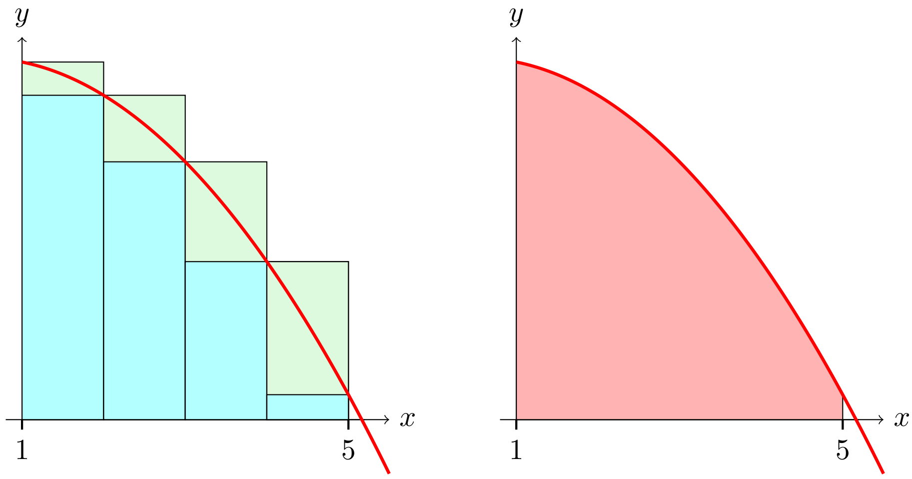
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=2}^{n+1} f(k) \ \leqslant\ \int_1^{n+1} f(t)\ dt \ \leqslant\ \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 1$.
En sommant les inégalités de la question précédente, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc} \sum\limits_{k=1}^{n} f(k+1) & \leqslant & \sum\limits_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\ dt & \leqslant & \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \\ \sum\limits_{k=2}^{n+1} f(k) & & \int_1^{n+1} f(t)\ dt & & \textit{(par relation de Chasles)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=2}^{n+1} f(k) \ \leqslant\ \int_1^{n+1} f(t)\ dt \ \leqslant\ \sum_{k=1}^{n} f(k)}$$

Représentation graphique : pour $n = 4$



$\sum\limits_{k=2}^{5} f(k)$ $\quad \int_1^5 f(t)\ dt$ $\quad \sum\limits_{k=1}^{4} f(k)$

□

3. En déduire : $\forall n \geqslant 2,\ \int_1^{n+1} f(t)\ dt \ \leqslant\ \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) \ \leqslant\ f(1) + \int_1^{n} f(t)\ dt$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Comme $n \geqslant 2$ alors $n \geqslant 1$.
  On peut donc utiliser l'inégalité de droite de la question précédente ce qui fournit de suite le résultat.
- Par ailleurs, d'après la question précédente :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=2}^{m+1} f(k) \ \leqslant\ \int_1^{m+1} f(t)\ dt$$

On applique cette inégalité pour $m = n - 1 \geqslant 1$. On obtient :

$$\sum_{k=2}^{(n-1)+1} f(k) \ \leqslant\ \int_1^{(n-1)+1} f(t)\ dt$$

Finalement en ajoutant $f(1)$ de part et d'autre :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \ \leqslant\ f(1)\ +\ \int_1^{n} f(t)\ dt$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \geqslant 2,\ \int_1^{n+1} f(t)\ dt \ \leqslant\ \sum_{k=1}^{n} f(k) \ \leqslant\ f(1) + \int_1^{n} f(t)\ dt.}$$

□

4. **Application**. Déduire de ce qui précède : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Démonstration.
Notons $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$.

- La fonction f est :
  × de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
  × décroissante sur $]0, +\infty[$.

  On en déduit donc, par application de la question précédente :

$$\forall n \geqslant 2,\ \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\ dt \ \leqslant\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ \leqslant\ \frac{1}{1} + \int_1^{n} \frac{1}{t}\ dt$$

  Enfin : $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{t}\ dt \ =\ [\ \ln(t)\ ]_1^{n+1} \ =\ \ln(n+1) - \cancel{\ln(1)}$ et de même $\displaystyle\int_1^{n} \frac{1}{t}\ dt \ =\ \ln(n)$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \geqslant 2,\ \ln(n+1) \ \leqslant\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ \leqslant\ 1 + \ln(n).}$$

- Pour tout $n \geqslant 2$, $\ln(n) > 0$.
  En multipliant les inégalités précédentes par $\dfrac{1}{\ln(n)} > 0$, on obtient :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \ \leqslant\ \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} \ \leqslant\ \frac{1}{\ln(n)} + \frac{\ln(n)}{\ln(n)} \ =\ \frac{1}{\ln(n)} + 1$$

- Or :
  × $\displaystyle\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \ =\ \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} \ =\ \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \ =\ 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + 0 = 1$
  × $\displaystyle\frac{1}{\ln(n)} + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 + 1 = 1$

  On en déduit par théorème d'encadrement que la suite $\left(\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)}\right)_{n\geqslant 2}$ est convergente de limite 1.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

□

Exercice 2

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Le but de cet exercice est de déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{n\,\big(\ln(n)\big)^{\beta}}$.

Dans la suite, on note $f : t \mapsto \dfrac{1}{t\,\big(\ln(t)\big)^{\beta}}$.

1. **Cas** $\beta < 0$.
Conclure ce cas en utilisant un théorème de comparaison des séries à termes positifs.

Démonstration.

- Tout d'abord, pour tout $t \geqslant \mathrm{e}$, on a, par croissance de la fonction ln :

$$\ln(t) \;\geqslant\; \ln(\mathrm{e}) \;=\; 1$$

Par croissance de la fonction élévation à la puissance $-\beta > 0$, on obtient alors :

$$\big(\ln(t)\big)^{-\beta} \;\geqslant\; 1^{-\beta} = 1$$

Finalement :

$$\frac{1}{t\,\big(\ln(t)\big)^{\beta}} \;=\; \frac{\big(\ln(t)\big)^{-\beta}}{t} \;\geqslant\; \frac{1}{t} \quad \left(\begin{array}{l} \textit{en multipliant l'inégalité} \\ \textit{précédente par } \frac{1}{t} \geqslant 0 \end{array}\right)$$

- On a :
  × $\forall n \geqslant 3$ (en particulier, $n \geqslant \mathrm{e}$) :

$$\frac{1}{n\,\big(\ln(n)\big)^{\beta}} \;\geqslant\; \frac{1}{n} \;\geqslant\; 0$$

  × La série $\sum \dfrac{1}{n}$ est divergente en tant que série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not> 1$).

  On en conclut par théorème de comparaison des séries à termes positifs que la série $\sum \dfrac{1}{n\,\big(\ln(n)\big)^{\beta}}$ est divergente.

$$\boxed{\text{Pour tout } \beta < 0, \text{ la série } \sum \frac{1}{n\,\big(\ln(n)\big)^{\beta}} \text{ est divergente.}}$$

□

2. **Cas** $\beta \geqslant 0$.

a) Démontrer que la fonction f est décroissante sur $]1, +\infty[$.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$ car elle est l'inverse $f = \dfrac{1}{g}$ où $g : t \mapsto x\,\big(\ln(t)\big)^{\beta}$:
  × est dérivable sur $]1, +\infty[$ par produit de fonctions dérivables sur $]1, +\infty[$.
  × `NE S'ANNULE PAS` sur $]1, +\infty[$.
- Pour tout $t \in\,]1, +\infty[$, on a :

$$\begin{array}{rcl} f'(t) & = & -\dfrac{1}{t^2}\,\big(\ln(t)\big)^{-\beta} \;+\; \dfrac{1}{t}\,(-\beta)\,\big(\ln(t)\big)^{-\beta-1}\,\dfrac{1}{t} \\[2ex] & = & -\dfrac{1}{t^2}\left(\dfrac{1}{\big(\ln(t)\big)^{\beta}} + \beta\,\dfrac{1}{\big(\ln(t)\big)^{\beta+1}}\right) \;\leqslant\; 0 \qquad \left(\textit{car } -\frac{1}{t^2} \leqslant 0 \textit{ et } \ln(t) > 0\right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } f \text{ est décroissante sur }]1, +\infty[.}$$

□

b) **Cas** $\beta \leqslant 1$.

(i) Démontrer : $\forall n \geqslant 2,\ \sum\limits_{k=2}^{n} f(k) \ \geqslant\ \int_2^{n+1} f(t)\ dt$.

Démonstration.

- Notons $h : t \mapsto f(t+1)$.
  La fonction h est continue et décroissante sur $]0,+\infty[$ car f l'est sur $]1,+\infty[$.
  On peut donc appliquer le résultat de la question ***2*** de l'Exercice 1 à la fonction h :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{m} h(k) \ \geqslant\ \int_1^{m+1} h(t)\ dt$$

- Soit $n \geqslant 2$. On utilise alors ce résultat pour $m = n-1 \in \mathbb{N}^*$. On obtient :

$$\begin{array}{ccc} \sum\limits_{k=1}^{n-1} f(k+1) & \geqslant & \int_1^{n} f(t+1)\ dt \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \sum\limits_{k=2}^{n} f(k) & & \int_2^{n+1} f(u)\ du \end{array}$$

(en posant le changement de variable $u = t+1$)

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \geqslant 2,\ \sum_{k=2}^{n} f(k) \ \geqslant\ \int_2^{n+1} f(t)\ dt.}$$

Commentaire

- La propriété démontrée dans l'Exercice 1 a été démontrée pour toute fonction continue et décroissante sur $]0,+\infty[$. On ne peut donc l'utiliser que pour une fonction continue et décroissante sur $]0,+\infty[$. C'est une évidence qu'il convient toutefois de rappeler car elle est trop régulièrement ignorée par les candidats : lorsque l'on souhaite utiliser un résultat précédemment démontré ou admis, il faut scrupuleusement vérifier que l'on est dans les conditions d'application de ce résultat.
- Il était aussi possible de faire une démonstration similaire à celle des questions ***1*** et ***2*** de l'Exercice 1. La présentation réalisée ici est plus subtile. Aux concours, le même nombre de points serait attribué à ces deux rédactions. Il est alors conseillé de choisir celle qui prend le plus faible temps de rédaction (temps de réflexion compris) et que l'on maîtrise la mieux.

□

(ii) Calculer l'intégrale.
(on pourra distinguer le cas $\beta = 1$ et $\beta < 1$)

Démonstration.
Deux cas se présentent.

- Si $\beta = 1$:

$$\int_2^{n+1} f(t)\ dt \ =\ \int_2^{n+1} \frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)}\ dt \ =\ \Big[\ \ln\big(\left|\ln(t)\right|\big)\ \Big]_2^{n+1} \ =\ \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))$$

$$\boxed{\int_2^{n+1} f(t)\ dt \ =\ \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))}$$

- Si $\beta < 1$:

$$\begin{aligned}\int_2^{n+1} f(t)\ dt &= \int_2^{n+1} \frac{1}{t}\ \big(\ln(t)\big)^{-\beta}\ dt \\ &= \left[\ \frac{\big(\ln(t)\big)^{-\beta+1}}{-\beta+1}\ \right]_2^{n+1} \\ &= \frac{1}{1-\beta}\ \Big(\big(\ln(n+1)\big)^{1-\beta} - \big(\ln(2)\big)^{1-\beta}\Big)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } \beta \neq 1 : \int_2^{n+1} f(t)\ dt\ =\ \frac{1}{1-\beta}\ \Big(\big(\ln(n+1)\big)^{1-\beta} - \big(\ln(2)\big)^{1-\beta}\Big)}$$

□

(iii) Conclure ce cas.

Démonstration.

- Deux cas se présentent :
  × si $\beta = 1$:
  $$\int_2^{n+1} f(t)\ dt\ =\ \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
  × si $\beta < 1$:
  $$\int_2^{n+1} f(t)\ dt\ =\ \frac{1}{1-\beta}\ \Big(\big(\ln(n+1)\big)^{1-\beta} - \big(\ln(2)\big)^{1-\beta}\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
  car $1-\beta > 0$ et $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall \beta \in [0,1],\ \int_2^{n+1} f(t)\ dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

- D'après la question ***2.b)(i)*** :

$$\sum_{k=2}^{n} f(k)\ \geqslant\ \int_2^{n+1} f(t)\ dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

On en déduit, par théorème de comparaison des limites infinies que la suite $\left(\sum\limits_{k=2}^{n} f(k)\right)$ diverge vers $+\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi, si } \beta \in [0,1], \text{ la série } \sum \frac{1}{n\ \big(\ln(n)\big)^{\beta}} \text{ est divergente.}}$$

□

c) **Cas** $\beta > 1$.

(i) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \ \leqslant \ f(2) + \int_2^{n+1} f(t)\ dt$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant l'inégalité de droite (vérifiée pour tout entier naturel strictement positif) de la question ***3*** de l'Exercice 1 à la fonction h (introduite en question ***2.b)(i)***), on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} h(k) \ \leqslant \ h(1) + \int_1^n h(t)\ dt$$

Ce qui s'écrit :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k+1) & \leqslant & f(2) & + & \displaystyle\int_1^n f(t+1)\ dt \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} f(k) & & f(2) & + & \displaystyle\int_2^{n+1} f(u)\ du \end{array}$$

(en posant le changement de variable $u = t+1$)

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=2}^{n+1} f(k) \ \leqslant \ f(2) + \int_2^{n+1} f(t)\ dt.}$$

□

(ii) En déduire que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} f(k)\right)_{n \geqslant 2}$ est bornée.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord que pour tout $k \geqslant 2$, comme $\ln(k) > 0$, on a :

$$f(k) \ = \ \frac{1}{k\,\big(\ln(k)\big)^{\beta}} \ > \ 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \geqslant 2 : \sum_{k=2}^{n} f(k) \ > \ 0.}$$

- Soit $n \geqslant 2$. En appliquant la question précédente en $n-1 \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{k=2}^{n} f(k) & \leqslant & \displaystyle f(2) + \int_2^n f(t)\ dt \\ & = & \dfrac{1}{2\,\big(\ln(2)\big)^{\beta}} + \dfrac{1}{1-\beta}\ \Big(\big(\ln(n)\big)^{1-\beta} - \big(\ln(2)\big)^{1-\beta}\Big) \\ & = & \dfrac{1}{2\,\big(\ln(2)\big)^{\beta}} + \dfrac{-1}{\beta-1}\ \left(\dfrac{1}{\big(\ln(n)\big)^{\beta-1}} - \dfrac{1}{\big(\ln(2)\big)^{\beta-1}}\right) \\ & = & \dfrac{1}{2\,\big(\ln(2)\big)^{\beta}} + \dfrac{1}{\beta-1}\ \dfrac{1}{\big(\ln(2)\big)^{\beta-1}} - \dfrac{1}{\beta-1}\ \dfrac{1}{\big(\ln(n)\big)^{\beta-1}} \\ & \leqslant & \dfrac{1}{2\,\big(\ln(2)\big)^{\beta}} + \dfrac{1}{\beta-1}\ \dfrac{1}{\big(\ln(2)\big)^{\beta-1}} \end{array}$$

(car $-\frac{1}{\beta-1}\,\frac{1}{\left(\ln(n)\right)^{\beta-1}} \leqslant 0$ puisque $\beta - 1 > 0$)

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \geqslant 2 : \sum_{k=2}^{n} f(k) \ \leqslant \ \frac{1}{2\,\big(\ln(2)\big)^{\beta}} + \frac{1}{\beta-1}\ \frac{1}{\big(\ln(2)\big)^{\beta-1}}.}$$

Commentaire

- Commençons par rappeler :

$$\text{La suite réelle } (v_n) \text{ est bornée} \quad \Leftrightarrow \quad \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant v_n \leqslant M$$

- Il faut bien comprendre que les réels m et M apparaissant dans cette définition ne peuvent pas dépendre de n. Autrement dit, une suite réelle $(v_n)_n$ est bornée si son terme général v_n est encadré par deux nombres indépendants de n.
- Par exemple, si l'on écrit :

$$0 \leqslant n^2 \leqslant 2\,n^2$$

on ne peut en conclure pour autant que la suite (n^2) est majorée. En réalité, la suite (n^2) est croissante et non majorée, ce qui démontre qu'elle diverge vers $+\infty$.

□

(iii) Conclure ce cas.

Démonstration.
La suite $\left(\sum\limits_{k=2}^{n} f(k) \right)_{n \geqslant 2}$ est :
× croissante. En effet, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) - \sum_{k=2}^{n} f(k) = f(n+1) \geqslant 0$$

× majorée par $\dfrac{1}{2\,\big(\ln(2)\big)^{\beta}} + \dfrac{1}{\beta - 1}\,\dfrac{1}{\big(\ln(2)\big)^{\beta-1}}$.
Elle est donc convergente.

$$\boxed{\text{Ainsi, si } \beta > 1, \text{ la série } \sum \frac{1}{n\,\big(\ln(n)\big)^{\beta}} \text{ est convergente.}}$$

□

Commentaire

- Dans cet exerice, on s'intéresse à la nature des « séries de Bertrand ». L'énoncé général stipule :

$$\text{La série } \sum \frac{1}{n^{\alpha}\,\big(\ln(n)\big)^{\beta}} \text{ est convergente} \quad \Leftrightarrow \quad \big(\alpha > 1\big) \quad \texttt{OU} \quad \big(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1\big)$$

- On s'est intéressé plus particulièrement au cas où $\alpha = 1$. On peut signaler qu'il est aisé de démontrer que, dans le cas où $\alpha > 1$, la série $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha}\,\big(\ln(n)\big)^{\beta}}$ est convergente. Pour ce faire, on peut remarquer :

$$\frac{1}{n^{\alpha}\,\big(\ln(n)\big)^{\beta}} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}} \right)$$

et conclure par le critère de négligeabilité des séries à termes positifs (puisque $\frac{1+\alpha}{2} > 1$).

Exercice 3
Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Démontrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall x_0 \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k \ + \ \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!}\ f^{(n+1)}(t)\ dt$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n)$: $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall x_0 \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k \ + \ \displaystyle\int_{x_0}^{x} \dfrac{(x-t)^n}{n!}\ f^{(n+1)}(t)\ dt.$

- **Initialisation**
  Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Remarquons :
  × $\sum\limits_{k=0}^{0} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k \ = \ \dfrac{f^{(0)}(x_0)}{0!}\,(x-x_0)^0 \ = \ f(x_0)$
  × $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \dfrac{(x-t)^0}{0!}\ f^{(0+1)}(t)\ dt \ = \ \int_{x_0}^{x} f'(t)\ dt \ = \ [\ f(t)\ ]_{x_0}^{x} \ = \ f(x) - f(x_0)$

  Notons au passage que l'intégrale $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f'(t)\ dt$ est bien définie car l'intégrande f' est continu sur le `SEGMENT` d'extrémités x_0 et x ($[x_0, x]$ si $x \geqslant x_0$ ou $[x, x_0]$ si $x_0 > x$).

  Finalement :

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k \ + \ \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^0}{0!}\ f^{(0+1)}(t)\ dt \ = \ \cancel{f(x_0)} \ + \ \big(f(x) - \cancel{f(x_0)}\big) \ = \ f(x)$$

  D'où $\mathcal{P}(0)$.

- **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\left(\text{c'est-à-dire : } \forall x \in \mathbb{R},\ \forall x_0 \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k \ + \ \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ f^{(n+2)}(t)\ dt\right)$$

  Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

  • Remarquons tout d'abord que l'intégrale $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ f^{(n+2)}(t)\ dt$ est bien défini car l'intégrande $t \mapsto \dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ f^{(n+2)}(t)$ est continu sur le `SEGMENT` d'extrémités x_0 et x en tant que produit de fonctions continues sur ce segment.

  • On procède par intégrations par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & \dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} & \quad & u'(t) & = & (n+1)\ \dfrac{(x-t)^n}{(n+1)!}\ (-1) \\[2ex] v'(t) & = & f^{(n+2)}(t) & & v(t) & = & f^{(n+1)}(t) \end{array}\right.$$

  Cette IPP est valide car :
  × la fonction u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le `SEGMENT` d'extrémités x_0 et x en tant que fonction polynomiale.
  × la fonction $v = f^{(n+1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le `SEGMENT` d'extrémités x_0 et x.

On obtient :

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ f^{(n+2)}(t)\ dt &= \left[\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ f^{(n+1)}(t)\right]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!}\ f^{(n+1)}(t)\ dt \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left(\cancel{(x-x)^{n+1}\ f^{(n+1)}(x)} - (x-x_0)^{n+1}\ f^{(n+1)}(x_0)\right) \\ &\quad + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!}\ f^{(n+1)}(t)\ dt\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ f^{(n+2)}(t)\ dt \\ =\ &\sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k - \frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\ f^{(n+1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!}\ f^{(n+1)}(t)\ dt \\ =\ &\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!}\ f^{(n+1)}(t)\ dt \ = \ f(x) \qquad \textit{(par hypothèse de récurrence)}\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n).}$$

Commentaire

Il est aussi possible de partir de l'hypothèse de récurrence et de procéder par intégration par parties sur l'intégrale $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!}\ f^{(n+1)}(t)\ dt$:

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & f^{(n+1)}(t) & & u'(t) & = & f^{(n+2)}(t) \\ v'(t) & = & \dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} & & v(t) & = & \dfrac{(x-t)^{n+2}}{(n+2)\ (n+1)!}\ (-1) \end{array}\right.$$

Ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}&f(x) \\ =\ &\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!}\ f^{(n+1)}(t)\ dt \\ =\ &\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ f^{(n+2)}(t)\ dt \\ =\ &\sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ f^{(n+2)}(t)\ dt\end{aligned}$$

□