DM2

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E. Pour tout polynôme P de E, on note indifféremment P ou $P(X)$.
Pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, la dérivée P' du polynôme $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ est le polynôme $P' = \beta + 2\gamma X$, et la dérivée seconde P'' de P est le polynôme $P'' = 2\gamma$.
On note, pour tout polynôme P de E :

$$a(P) = P - XP', \quad b(P) = P - P', \quad c(P) = 2XP - (X^2 - 1)\ P'$$

Par exemple : $a(X^2) = X^2 - X(2X) = -X^2$.
Enfin, on note $f = b \circ a - a \circ b$.

Partie I : Étude de a

1. Montrer que a est un endomorphisme de E.

2. ***a)*** Montrer que la matrice A de a dans la base $\mathscr{B}$ de E est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Déterminer le rang de la matrice A.

3. L'endomorphisme a est-il bijectif ? Déterminer $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$.

On admet, pour la suite de l'exercice, que b et c sont des endomorphismes de E.
On note B et C les matrices, dans la base $\mathscr{B}$ de E, de b et c respectivement.

Partie II : Étude de b

4. Montrer que b est bijectif et que, pour tout Q de E, on a : $b^{-1}(Q) = Q + Q' + Q''$.

5. ***a)*** Déterminer B, la matrice représentative de b dans la base $\mathscr{B}$.

b) Déterminer une base de l'espace vectoriel $E_1(b) = \mathrm{Ker}(b - \mathrm{id}_E)$.

Partie III : Étude de c

6. Montrer : $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. L'endomorphisme c est-il bijectif ?

8. ***a)*** Déterminer une base de chacun des espaces vectoriels suivants :

$$E_{-2}(c) = \mathrm{Ker}(c + 2\,\mathrm{id}_E), \quad E_2(c) = \mathrm{Ker}(c - 2\,\mathrm{id}_E) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(c)$$

b) Démontrer que la famille $\left(1 - 2X + X^2,\ 1 + 2X + X^2,\ -1 + X^2\right)$ est une base de E.

Partie IV : Étude de f

9. Montrer : $\forall P \in E,\ f(P) = P'$.

10. En déduire : $(BA - AB)^3 = 0$.