DM2

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E. Pour tout polynôme P de E, on note indifféremment P ou $P(X)$.
Pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, la dérivée P' du polynôme $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ est le polynôme $P' = \beta + 2\gamma X$, et la dérivée seconde P'' de P est le polynôme $P'' = 2\gamma$.
On note, pour tout polynôme P de E :

$$a(P) = P - XP', \quad b(P) = P - P', \quad c(P) = 2XP - (X^2 - 1)\ P'$$

Par exemple : $a(X^2) = X^2 - X(2X) = -X^2$.
Enfin, on note $f = b \circ a - a \circ b$.

Commentaire

L'énoncé prend partie de noter indifféremment P et $P(X)$, ce qui permet d'alléger les notations. En contrepartie, ce choix peut amener à des confusions sur les objets manipulés. Afin d'éviter ces confusions, on évitera, dans ce corrigé, d'utiliser l'abus de notation autorisé par l'énoncé.

Partie I : Étude de a

1. Montrer que a est un endomorphisme de E.

Démonstration.

- Montrons que a est une application linéaire.
  Soit $(P_1, P_2) \in E^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl}
\big(a(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)\big)(X) & = & \big(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2\big)(X) - X\ \big(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2\big)'(X) \\
& = & \lambda_1 \cdot P_1(X) + \lambda_2 \cdot P_2(X) - X\ \big(\lambda_1 \cdot P_1'(X) + \lambda_2 \cdot P_2'(X)\big) \\
& = & \lambda_1 \cdot P_1(X) + \lambda_2 \cdot P_2(X) - \lambda_1 \cdot XP_1'(X) - \lambda_2 \cdot XP_2'(X) \\
& = & \lambda_1 \cdot (P_1(X) - XP_1'(X)) + \lambda_2 \cdot (P_2(X) - XP_2'(X)) \\
& = & \lambda_1 \cdot (a(P_1))(X) + \lambda_2 \cdot (a(P_2))(X) \\
& = & \big(\lambda_1 \cdot a(P_1) + \lambda_2 \cdot a(P_2)\big)(X)
\end{array}$$

  Et ainsi : $a(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2) = \lambda_1 \cdot a(P_1) + \lambda_2 \cdot a(P_2)$.

- Montrons que $a(E) \subset E$. Autrement dit, montrons que pour tout $P \in E$, $a(P) \in E$.
  Soit $P \in E$. Alors il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $P(X) = \alpha + \beta X + \gamma X^2$. Donc :

$$\begin{array}{rcl}
(a(P))(X) & = & P(X) - XP'(X) \\
& = & \alpha + \beta X + \gamma X^2 - X(\beta + 2\gamma X) \\
& = & -\gamma X^2 + \alpha
\end{array}$$

  Ainsi, $a(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 : $a(P) \in E$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } a \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

□

2. ***a)*** Montrer que la matrice A de a dans la base $\mathscr{B}$ de E est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Démonstration.
Pour éviter les confusions, on notera $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$P_0(X) = 1, \quad P_1(X) = X, \quad P_2(X) = X^2$$

- $\big(a(P_0)\big)(X) = P_0(X) - X \times P_0'(X) = 1 - 0 = 1 = P_0(X)$. On en déduit :

$$a(P_0) = 1 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$$

  Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a(P_0)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $\big(a(P_1)\big) = P_1(X) - X \times P_1'(X) = X - X = 0$. On en déduit :

$$a(P_1) = 0 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a(P_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $\big(a(P_2)\big)(X) = P_2(X) - X \times P_2'(X) = X^2 - 2X^2 = -X^2 = -P_2(X)$. On en déduit :

$$a(P_2) = 0 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 - 1 \cdot P_2$$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a(P_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

□

b) Déterminer le rang de la matrice A.

Démonstration.

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \overset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right) \overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2$$

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = 2}$$

□

3. L'endomorphisme a est-il bijectif ? Déterminer $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\dim(\mathrm{Im}(a)) = \mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}(A) = 2 < 3 = \dim(E)$.
  Donc $\mathrm{Im}(a) \neq E$. Ainsi l'endomorphisme a n'est pas surjectif.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'endomorphisme } a \text{ n'est pas bijectif.}}$$

- D'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim(E) & = & \dim(\mathrm{Ker}(a)) & + & \mathrm{rg}(a) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 3 & & & & 2 \end{array}$$

  D'où : $\dim(\mathrm{Ker}(a)) = 1$.

D'après la question précédente : $a(P_1) = 0$. Ainsi $P_1 \in \text{Ker}(a)$.
La famille (P_1) est donc une famille :

× libre, car elle est constituée uniquement d'un vecteur non nul,

× telle que : $\text{Card}((P_1)) = 1 = \dim(\text{Ker}(a))$.

On en déduit que (P_1) est une base de $\text{Ker}(a)$.

$$\boxed{\text{Ker}(a) = \text{Vect}\,(P_1)}$$

- Par caractérisation de l'image d'une application linéaire :

$$\text{Im}(a) = \text{Vect}\,(a(P_0),\ a(P_1),\ a(P_2)) = \text{Vect}\,(P_0,\ 0,\ -P_2) = \text{Vect}\,(P_0,\ P_2)$$

Ainsi la famille (P_0, P_2) est :

× génératrice de $\text{Im}(a)$,

× telle que : $\text{Card}\big((P_0, P_2)\big) = 2 = \dim\big(\text{Im}(a)\big)$.

C'est donc une base de $\text{Im}(a)$.

$$\boxed{\text{Im}(a) = \text{Vect}\,(P_0, P_2)}$$

Commentaire

- On peut aussi utiliser le spectre de A pour déterminer si a est bijectif.
  Détaillons cette méthode.

  La matrice A est diagonale. Ainsi, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. D'où : $\text{Sp}(A) = \{-1, 0, 1\}$. Or, comme A est la matrice représentative de l'endomorphisme a dans la base $\mathscr{B}$:

  $$\text{Sp}(a) = \text{Sp}(A) = \{-1, 0, 1\}$$

  Le réel 0 étant valeur propre de a, l'endomorphisme a n'est pas bijectif.
- Il est possible de déterminer $\text{Ker}(a)$ par le calcul. Détaillons cette méthode.

  Soit $P \in E$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = x \cdot P_0 + y \cdot P_1 + z \cdot P_2$.
  Ainsi $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et :

  $$P \in \text{Ker}(a) \ \Leftrightarrow\ a(P) = 0_E \ \Leftrightarrow\ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow\ \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & 0 \\ & 0 & & = & 0 \\ & & -\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

  Donc :

  $$\begin{aligned} \text{Ker}(a) &= \{x \cdot P_0 + y \cdot P_1 + z \cdot P_2 \in E \mid x = 0 \text{ et } z = 0\} \\ &= \{y \cdot P_1 \mid y \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\,(P_1) \end{aligned}$$

□

On admet, pour la suite de l'exercice, que b et c sont des endomorphismes de E.
On note B et C les matrices, dans la base $\mathscr{B}$ de E, de b et c respectivement.

Partie II : Étude de b

4. Montrer que b est bijectif et que, pour tout Q de E, on a : $b^{-1}(Q) = Q + Q' + Q''$.

Démonstration.

- Notons $g : E \to E$ l'endomorphisme de E défini par $g : Q \mapsto Q + Q' + Q''$.
Il s'agit de démontrer que b est bijective, de réciproque g. Pour ce faire, on démontre :

$$b \circ g = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad g \circ b = \mathrm{id}_E$$

- Soit $P \in E$.

$$\begin{aligned}
(b \circ g)(P) &= b\big(g(P)\big) \\
&= b(P + P' + P'') \\
&= b(P) + b(P') + b(P'') && \textit{(par linéarité de } b\textit{)} \\
&= (P - \cancel{P'}) + (\cancel{P'} - \cancel{P''}) + (\cancel{P''} - P''') \\
&= P - P''' \\
&= P && \textit{(}P''' = 0_E \textit{ car } P \textit{ est un polynôme de degré au plus } 2\textit{)}
\end{aligned}$$

On en déduit : $b \circ g = \mathrm{id}_E$.
De même :

$$\begin{aligned}
(g \circ b)(P) &= g\big(P - P'\big) \\
&= (P - P') + (P - P')' + (P - P')'' \\
&= P - P' + P' - P'' + P'' - P''' \ = \ P - P''' \ = \ P
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les applications } g \text{ et } b \text{ sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.} \\ \text{On en déduit notamment : } \forall Q \in E,\ b^{-1}(Q) = g(Q) = Q + Q' + Q''.\end{array}}$$

Commentaire

- Rigoureusement, tant que l'on n'a pas démontré que b est bijective, on ne peut utiliser la notation b^{-1}. C'est pourquoi on introduit l'application g en début de démonstration.
- L'énoncé fournit explicitement l'endomorphisme g. Dans ce cas, pour démontrer que b est bijectif et que $b^{-1} = g$, il suffit de vérifier les égalités :

$$b \circ g = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad g \circ b = \mathrm{id}_E$$

- L'espace vectoriel E étant de dimension finie, il est même possible de ne démontrer qu'une des deux égalités précédentes. Plus précisément, si b et g sont des endomorphismes d'un espace vectoriel **de dimension finie** E :

$$b \circ g = \mathrm{id}_E \ \Rightarrow \ \left\{ \begin{array}{l} b \text{ et } g \text{ sont bijectives,} \\ b^{-1} = g \ \text{ et } \ g^{-1} = b \end{array} \right.$$

(la propriété réciproque est évidemment vérifiée)

- On peut énoncer un résultat similaire dans l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n. Plus précisément, si A et B sont des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$AB = I_n \ \Rightarrow \ \left\{ \begin{array}{l} A \text{ et } B \text{ sont inversibles,} \\ A^{-1} = B \ \text{ et } \ B^{-1} = A \end{array} \right.$$

□

5. a) Déterminer B, la matrice représentative de b dans la base $\mathscr{B}$.

Démonstration.
On remarque :

× tout d'abord : $\big(b(P_0)\big)(X) = P_0(X) - P_0'(X) = 1 = P_0(X)$. On en déduit :

$$b(P_0) \;=\; 1 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$$

Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(b(P_0)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× ensuite : $\big(b(P_1)\big)(X) = P_1(X) - P_1'(X) = X - 1 = -P_0(X) + P_1(X)$. On en déduit :

$$b(P_1) \;=\; -1 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$$

Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(b(P_1)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× enfin : $\big(b(P_2)\big)(X) = P_2(X) - P_2'(X) = X^2 - 2X = -2\ P_1(X) + P_2(X)$. On en déduit :

$$b(P_1) \;=\; 0 \cdot P_0 - 2 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2$$

Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(b(P_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

b) Déterminer une base de l'espace vectoriel $E_1(b) = \mathrm{Ker}(b - \mathrm{id}_E)$.

Démonstration.

- Soit $P \in E$. Alors il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} P \in E_1(b) &\Leftrightarrow (b - \mathrm{id}_E)(P) = 0_E \\ &\Leftrightarrow (B - I_3)\, U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} -y & & & = & 0 \\ & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

- On obtient :

$$\begin{aligned} E_1(b) &= \{x \cdot P_0 + y \cdot P_1 + z \cdot P_2 \mid y = 0 \text{ et } z = 0\} \\ &= \{x \cdot P_0 \mid x \in \mathbb{R}\} \;=\; \mathrm{Vect}\,(P_0) \end{aligned}$$

- La famille (P_0) est donc :
  - × génératrice de E, d'après ce qui précède,
  - × libre, car uniquement constituée d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{La famille } (P_0) \text{ est donc une base de } E_1(b).}$$

□

Partie III : Étude de c

6. Montrer : $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\big(c(P_0)\big)(X) \;=\; 2X \times P_0(X) - (X^2-1) \times P_0'(X) \;=\; 2X \;=\; 0 \cdot P_0(X) + 2 \cdot P_1(X) + 0 \cdot P_2(X)$$

Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(c(P_0)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Ensuite :

$$\big(c(P_1)\big)(X) \;=\; 2X \times P_1(X) - (X^2-1) \times P_1'(X) \;=\; X^2+1 \;=\; 1 \cdot P_0(X) + 0 \cdot P_1(X) + 1 \cdot P_2(X)$$

Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(c(P_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Enfin :

$$\big(c(P_2)\big)(X) \;=\; 2X \times P_2(X) - (X^2-1) \times P_2'(X) \;=\; 2X \;=\; 0 \cdot P_0(X) + 2 \cdot P_1(X) + 0 \cdot P_2(X)$$

Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(c(P_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

7. L'endomorphisme c est-il bijectif ?

Démonstration.

$$\mathrm{rg}(c) \;=\; \mathrm{rg}(C) \;=\; \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \;\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=}\; \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \;=\; 2$$

On en déduit $\dim(\mathrm{Im}(c)) = \mathrm{rg}(c) = 2 \neq 3 = \dim(E)$.
Donc : $\mathrm{Im}(c) \neq E$, ce qui implique que l'endomorphisme c n'est pas surjectif.

$$\boxed{\text{Ainsi l'endomorphisme } c \text{ n'est pas bijectif.}}$$

□

8. a) Déterminer une base de chacun des espaces vectoriels suivants :

$$E_{-2}(c) = \operatorname{Ker}(c + 2\,\mathrm{id}_E), \quad E_2(c) = \operatorname{Ker}(c - 2\,\mathrm{id}_E) \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker}(c)$$

Démonstration.

- Déterminons une base de $E_{-2}(c)$.

  Soit $P \in E$. Alors il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $U = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
P \in E_{-2}(c) & \iff & (c + 2\,\mathrm{id}_E)(P) = 0_E \\
& \iff & (C + 2\,I_3)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & & & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & & & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 0 \\ & & y & = & -2z \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rrcr} 2x & & = & 2z \\ & y & = & -2z \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rrcr} x & & = & z \\ & y & = & -2z \end{array} \right.
\end{array}$$

  On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
E_{-2}(c) & = & \{x \cdot P_0 + y \cdot P_1 + z \cdot P_2 \mid x = z \text{ et } y = -2z\} \\
& = & \{z \cdot P_0 - 2z \cdot P_1 + z \cdot P_3 \mid z \in \mathbb{R}\} \;=\; \{z \cdot (P_0 - 2P_1 + P_2) \mid z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \operatorname{Vect}(P_0 - 2P_1 + P_2)
\end{array}$$

  La famille $(P_0 - 2P_1 + P_2)$ est donc :

  × génératrice de $E_{-2}(c)$, d'après ce qui précède,

  × libre, car uniquement constituée d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{La famille } (P_0 - 2P_1 + P_2) \text{ est donc une base de } E_{-2}(c).}$$

- Déterminons une base de $E_2(c)$.

  Soit $P \in E$. Alors il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
P \in E_2(c) & \Longleftrightarrow & (c - 2\,\mathrm{id}_E)(P) = 0_E \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & (C - 2\,I_3)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & & & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & & & = & 0 \\ & - & y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -2x & + & y & = & 0 \\ & & y & = & 2z \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -2x & & & = & -2z \\ & & y & = & 2z \end{array} \right. \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & & & = & z \\ & & y & = & 2z \end{array} \right.
\end{array}$$

  On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
E_2(c) & = & \{x \cdot P_0 + y \cdot P_1 + z \cdot P_2 \mid x = z \text{ et } y = 2z\} \\[3mm]
& = & \{z \cdot P_0 + 2z \cdot P_1 + z \cdot P_3 \mid z \in \mathbb{R}\} \ = \ \{z \cdot (P_0 + 2P_1 + P_2) \mid z \in \mathbb{R}\} \\[3mm]
& = & \mathrm{Vect}\,(P_0 + 2P_1 + P_2)
\end{array}$$

  La famille $(P_0 + 2P_1 + P_2)$ est donc :
  × génératrice de $E_2(c)$, d'après ce qui précède,
  × libre, car uniquement constituée d'un vecteur non nul.

  $\boxed{\text{La famille } (P_0 + 2P_1 + P_2) \text{ est donc une base de } E_2(c).}$

- Déterminons une base de $\mathrm{Ker}(c)$.

  Soit $P \in E$. Alors il existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} P \in \mathrm{Ker}(c) & \Longleftrightarrow & c(P) = 0_E \\ & \Longleftrightarrow & C\,U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & y & & & = & 0 \\ 2x & & & + & 2z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} & & y & = & 0 \\ x & & & = & -z \end{array} \right. \end{array}$$

  On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker}(c) & = & \{x \cdot P_0 + y \cdot P_1 + z \cdot P_2 \mid y = 0 \text{ et } x = -z\} \\ & = & \{-z \cdot P_0 + z \cdot P_2 \mid z \in \mathbb{R}\} \ = \ \{z \cdot (-P_0 + P_2) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \mathrm{Vect}\,(-P_0 + P_2) \end{array}$$

  La famille $(-P_0 + P_2)$ est donc :
  - × génératrice de $\mathrm{Ker}(c)$, d'après ce qui précède,
  - × libre, car uniquement constituée d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{La famille } (-P_0 + P_2) \text{ est donc une base de } \mathrm{Ker}(c).}$$

□

b) Démontrer que la famille $\big(1 - 2X + X^2,\ 1 + 2X + X^2,\ -1 + X^2\big)$ est une base de E.

Démonstration.

- Montrons tout d'abord que $(P_0 - 2\,P_1 + P_2,\ P_0 + 2\,P_1 + P_2,\ -P_0 + P_2)$ est une famille libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
  Supposons :

$$\lambda_1 \cdot (P_0 - 2\,P_1 + P_2) + \lambda_2 \cdot (P_0 + 2\,P_1 + P_2) + \lambda_3 \cdot (-P_0 + P_2) \ = \ 0_E \qquad (*)$$

Or : $(*) \iff (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_2) \cdot P_0 + (-2\lambda_1 + 2\lambda_2) \cdot P_1 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \cdot P_2 \ = \ 0_E$

$$\begin{array}{cl} \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ -2\,\lambda_1 & + & 2\,\lambda_2 & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad \textit{(car la famille } (P_0, P_1, P_2) \textit{ est libre)} \\ \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + 2\,L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & 4\,\lambda_2 & - & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 2\,\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \\ \Longleftrightarrow & \left\{ \ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right. \\ & \textit{(par remontées successives)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la famille } (P_0 - 2\,P_1 + P_2,\ P_0 + 2\,P_1 + P_2,\ -P_0 + P_2) \text{ est libre.}}$$

- Ainsi la famille $(P_0 - 2\,P_1 + P_2,\ 1 + 2\,P_1 + P_2,\ -P_0 + P_2)$ est :
  - × une famille libre de E,
  - × telle que : $\mathrm{Card}\big((P_0 - 2\,P_1 + P_2,\ 1 + 2\,P_1 + P_2,\ -P_0 + P_2)\ =\ 3\ =\ \dim(E)$.

$$\boxed{\text{La famille } (P_0 - 2\,P_1 + P_2,\ 1 + 2\,P_1 + P_2,\ -P_0 + P_2) \text{ est donc une base de } E.}$$

$\square$

Partie IV : Étude de f

9. Montrer : $\forall P \in E,\ f(P) = P'$.

Démonstration.
Soit $P \in E$.

$$\begin{array}{rcl}
(f(P))(X) & = & (b \circ a(P))(X) - (a \circ b(P))(X) \\
& = & b(P(X) - X\,P'(X)) - a(P(X) - P'(X)) \\
& = & (P(X) - X\,P'(X)) - (P(X) - X\,P'(X))' - \Big((P(X) - P'(X)) - X\ (P(X) - P'(X))'\Big) \\
& = & \cancel{P(X)} - X\,P'(X) - \Big(\cancel{P'(X)} - (\cancel{P'(X)} + X\,P''(X))\Big) \\
& & - \Big(\cancel{P(X)} - P'(X) - X\,P'(X) + X\,P''(X)\Big) \\
& = & -\cancel{X\,P'(X)} + \cancel{X\,P''(X)} + P'(X) + \cancel{X\,P'(X)} - \cancel{X\,P''(X)} \\
& = & P'(X)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } P \in E,\ f(P) = P'.}$$

$\square$

10. En déduire : $(BA - AB)^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

Démonstration.
Soit $P \in E$.
Tout d'abord, d'après la question ***9*** : $f(P) = P'$.
De plus, comme P est un polynôme de degré au plus 2, on en déduit : $(f \circ f \circ f)(P) = P''' = 0_E$.
Ceci étant vrai pour tout $P \in E$, on en déduit : $f \circ f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
en passant à l'écriture matricielle :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f \circ f \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(0_{\mathscr{L}(E)}) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

Or $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f \circ f \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^3) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))^3 = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(b \circ a - a \circ b))^3 = (BA - AB)^3$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } (BA - AB)^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.}$$

$\square$