DM1 vA

On considère la fonction f définie sur $]0,1[$ par :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

Partie A : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in \,]0,1[, \; f'(x) = \frac{1}{x\,(1-x)\,\big(\ln(x)\big)^2} \, \big(-x\,\ln(x) - (1-x)\,\ln(1-x)\big)$$

2. ***a)*** Justifier : $\forall t \in \,]0,1[, \, t\,\ln(t) < 0$

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0,1[$.

3. ***a)*** Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$.

b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

4. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les branches infinies éventuelles.

Partie B : Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$.
En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on note u_n.

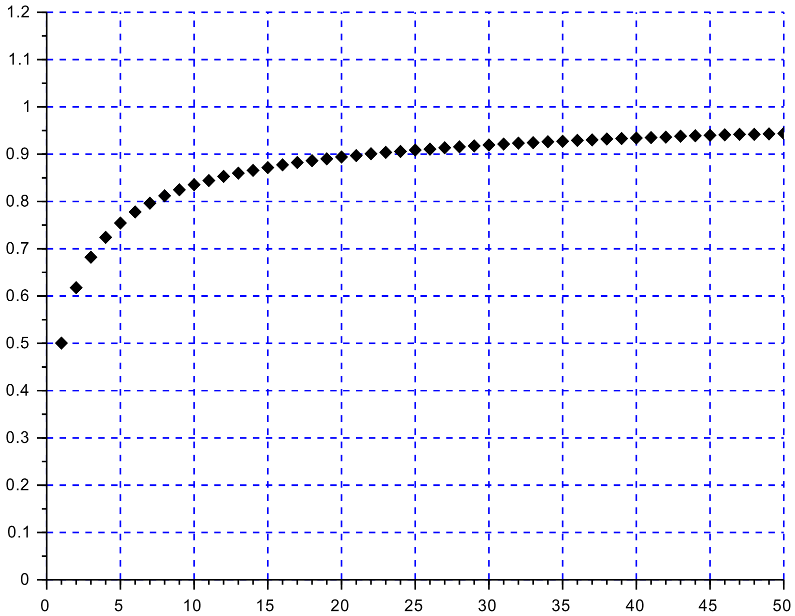
7. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0,1[$.

8. Déterminer u_1 et u_2.

9. ***a)*** Recopier et compléter la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
function u = valeur_approchee(n)
    a = 0
    b = 1
    while ...
        c = (a + b) / 2
        if (c ^ n + c - 1) > 0 then
            ...
        else
            ...
        end
        u = ...
    end
endfunction
```

b) On représente alors les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et on obtient le graphe suivant. Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?



10. a) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $f(u_n) = n$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.