

---

## DM1 vB

---

1. Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, on pose  $a_n = \frac{1}{n \ln(n)}$ .

a) Montrer que pour tout entier naturel  $k$  supérieur ou égal à 2, on a :  $\int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq \frac{1}{k \ln(k)}$ .

b) En déduire, par sommation, la nature de la série de terme général  $a_n$ .

Dans la suite, on considère la fonction  $f$  définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{-x}{(1-x) \ln(1-x)} & \text{si } x \in ]-\infty, 0[ \cup ]0, 1[ \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. a) Montrer que  $f$  est continue sur  $]-\infty, 1[$ .

b) Montrer que  $f$  est dérivable en 0 et donner la valeur de  $f'(0)$ .

3. a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]-\infty, 0[$  et sur  $]0, 1[$ .

Puis calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  de  $]-\infty, 0[ \cup ]0, 1[$ .

b) Étudier le signe de la quantité  $\ln(1-x) + x$ , lorsque  $x$  appartient à  $]-\infty, 1[$ , puis en déduire les variations de  $f$ .

c) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition, puis dresser son tableau de variations.

4. a) Établir que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , il existe un seul réel de  $[0, 1[$ , noté  $u_n$ , tel que  $f(u_n) = n$  et donner la valeur de  $u_1$ .

b) Montrer que la suite  $(u_n)$  converge et :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ .

c) Pour tout entier naturel  $n$  non nul, calculer  $f\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$  puis en déduire qu'il existe un entier naturel  $n_0$  tel que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à  $n_0$ , on a :  $u_n \leq 1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}$ .

d) En déduire, à l'aide de la première question, que la série de terme général  $\frac{1}{-n \ln(1-u_n)}$  est divergente.

e) Conclure, en revenant à la définition de  $u_n$ , que la série de terme général  $1 - u_n$  est divergente.