DM1 vB

1. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $a_n = \dfrac{1}{n\ \ln(n)}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on a : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t\ \ln(t)}\ dt \leqslant \frac{1}{k\ \ln(k)}$.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 2$. Soit $t \in [k, k+1]$. Alors :

$$\begin{array}{lrcll} & k & \leqslant & t & \\ \text{donc} & \ln(k) & \leqslant & \ln(t) & \textit{(par croissance de la fonction } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ \text{d'où} & 0 \leqslant \ln(k) & \leqslant & \ln(t) & \textit{(car } k \geqslant 2\textit{)} \end{array}$$

On a donc :

$$0 \leqslant k \leqslant t \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \ln(k) \leqslant \ln(t)$$

Toutes les quantités étant positives, en multipliant membre à membre ces inégalités, on obtient :

$$\begin{array}{lrcll} & k\ \ln(k) & \leqslant & t\ \ln(t) & \\ \text{donc} & \dfrac{1}{k\ \ln(k)} & \geqslant & \dfrac{1}{t\ \ln(t)} & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \end{array}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k \leqslant k+1$) :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k\ \ln(k)}\ dt \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t\ \ln(t)}\ dt$$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k\ \ln(k)}\ dt = \frac{1}{k\ \ln(k)}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall k \geqslant 2,\ \int_k^{k+1} \frac{1}{t\ \ln(t)}\ dt \leqslant \frac{1}{k\ \ln(k)}.}$$

Commentaire

On s'est servi dans cette question d'une multiplication membre à membre de 2 inégalités. On aurait pu détailler cette étape :

× d'une part :

$$\begin{array}{rcccccll} & 0 & \leqslant & k & \leqslant & t & & \\ \text{donc} & 0 & \leqslant & k\ \ln(k) & \leqslant & t\ \ln(k) & (1) & \textit{(car } \ln(k) \geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

× d'autre part :

$$\begin{array}{rcccccll} & 0 & \leqslant & \ln(k) & \leqslant & \ln(t) & & \\ \text{donc} & 0 & \leqslant & t\ \ln(k) & \leqslant & t\ \ln(t) & (2) & \textit{(car } t \geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

En combinant (1) et (2), on obtient :

$$0 \leqslant k\ \ln(k) \leqslant t\ \ln(k) \leqslant t\ \ln(t)$$

Ainsi :

$$k\ \ln(k) \leqslant t\ \ln(t)$$

□

b) En déduire, par sommation, la nature de la série de terme général a_n.

Démonstration.

- D'après ce qui précède :

$$\forall k \geqslant 2, \quad \int_k^{k+1} \frac{1}{t\ \ln(t)}\ dt \leqslant \frac{1}{k\ \ln(k)}$$

- Soit $n \geqslant 2$. On somme les inégalités précédentes pour k variant de 2 à n ($n \geqslant 2$) :

$$\begin{array}{ccc} \sum\limits_{k=2}^{n} \left(\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t\ \ln(t)}\ dt \right) & \leqslant & \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\ \ln(k)} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \displaystyle\int_2^{n+1} \frac{1}{t\ \ln(t)}\ dt & & \sum\limits_{k=2}^{n} a_k \end{array} \quad \textit{(par relation de Chasles)}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_2^{n+1} \frac{1}{t\ \ln(t)}\ dt & = & \displaystyle\int_2^{n+1} \frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)}\ dt \\ & = & \Big[\ \ln\big(|\ln(t)|\big)\ \Big]_2^{n+1} \\ & = & \ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) \end{array}$$

De plus : $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$. D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\big(\ln(n+1)\big) = +\infty$.

Ainsi, par théorème de comparaison : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} a_k = +\infty$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum\limits_{n \geqslant 2} a_n \text{ est divergente.}}$$

□

Dans la suite, on considère la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{-x}{(1-x)\ \ln(1-x)} & \text{si } x \in \,]-\infty,0[\, \cup \,]0,1[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. ***a)*** Montrer que f est continue sur $]-\infty,1[$.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,1[$ car elle est le quotient $\dfrac{f_1}{f_2}$ de :
  - × $f_1 : x \mapsto -x$ qui est continue sur $]-\infty,0[$ et $]0,1[$,
  - × $f_2 : x \mapsto (1-x)\ \ln(1-x)$ qui :
    - est continue sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,1[$,
    - `NE S'ANNULE PAS` sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,1[$.
- La fonction f est continue en 0. En effet :
  - × d'une part :

$$-x \underset{x\to 0}{\sim} -x \qquad 1-x \underset{x\to 0}{\sim} 1 \qquad \ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$$

  On en déduit :

$$f(x) = \frac{-x}{(1-x)\ \ln(1-x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\cancel{-x}}{1 \times (\cancel{-x})} = 1$$

  D'où : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.
  - × d'autre part : $f(0) = 1$.

  Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

$$\boxed{\text{On en conclut que la fonction } f \text{ est continue sur }]-\infty,1[.}$$

□

b) Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

Démonstration.

- Étudions la dérivabilité de f en 0 :

$$\tau_0(f)(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{-x}{(1-x)\ \ln(1-x)} - 1}{x} = \frac{-x-(1-x)\ \ln(1-x)}{x\,(1-x)\ \ln(1-x)}$$

- Tout d'abord :

$$x\,(1-x)\ \ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} x \times 1 \times (-x) = -x^2$$

$$\boxed{x\,(1-x)\ \ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -x^2}$$

- Ensuite :
  - × comme $\lim\limits_{x\to 0} -x = 0$:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + x^2\,\varepsilon(x)$$

  où $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie : $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

× Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \ln(1-x) & = & -x - \dfrac{x^2}{2} + x^2\,\varepsilon(x) \\ -x\ln(1-x) & = & x^2 + \dfrac{x^3}{2} - x^3\,\varepsilon(x) \end{array}$$

× On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} (1-x)\ln(1-x) & = & -x + \dfrac{x^2}{2} + x^2\left(\varepsilon(x) + \dfrac{x}{2} - x\,\varepsilon(x)\right) \\ & = & -x + \dfrac{x^2}{2} + x^2\,\varepsilon_1(x) \end{array}$$

où $\varepsilon_1 : x \mapsto \varepsilon(x) + \dfrac{x}{2} - x\,\varepsilon(x)$ vérifie : $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ (car $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$).

× D'où :

$$\begin{array}{rcl} -x-(1-x)\ln(1-x) & = & \cancel{-x} - \left(\cancel{-x} + \dfrac{x^2}{2} + x^2\,\varepsilon_1(x)\right) \\ & = & -\dfrac{x^2}{2} - x^2\,\varepsilon_1(x) \end{array}$$

Autrement dit :

$$-x-(1-x)\ln(1-x) = -\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$

$$\boxed{-x-(1-x)\ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}}$$

Commentaire

Démontrons qu'on a effectivement : $-x^2\,\varepsilon_1(x) = \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$.

$$\frac{-x^2\,\varepsilon_1(x)}{x^2} = -\varepsilon_1(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, comme :

$$-x-(1-x)\ln(1-x) = -\frac{x^2}{2} - x^2\,\varepsilon_1(x)$$

on a bien :

$$-x-(1-x)\ln(1-x) = -\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$

- Finalement :

$$\tau_0(f)(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{-x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = \frac{1}{2}.}$$

Commentaire

Pour obtenir un développement limité (DL) de la fonction $x \mapsto -x-(1-x)\ln(1-x)$ en 0, on a utilisé ici l'écriture du DL de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ en 0 à l'aide d'une fonction ε pour faciliter la compréhension des calculs. Le lecteur à l'aise avec les notations de Landau pouvait privilégier leur manipulation. On obtient la démonstration suivante.

× Tout d'abord, comme $\lim\limits_{x\to 0} -x = 0$: $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$.

× On en conclut :

$$\begin{aligned} -x\ln(1-x) &= x^2 + \frac{x^3}{2} - x\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \\ &= x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \end{aligned}$$

En effet :

- d'une part : $\dfrac{\frac{x^3}{2}}{x^2} = \dfrac{x}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. D'où : $\dfrac{x^3}{2} = \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$.
- d'autre part : $\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) = x^2\,\varepsilon(x)$ où $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Donc :

$$\frac{-x\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}{x^2} = \frac{-x \times \left(\cancel{x^2}\,\varepsilon(x)\right)}{\cancel{x^2}} = x\,\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

D'où : $-x\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) = \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$.

On peut démontrer de la même manière, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\theta\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) = \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$.

On en déduit : $-x\ln(1-x) = x^2 + 2\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) = x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$.

× Ainsi :

$$\begin{aligned} \ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \\ -x\ln(1-x) &= \phantom{-x - {}} x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \end{aligned}$$

× On en déduit :

$$\begin{aligned} (1-x)\ln(1-x) &= -x + \frac{x^2}{2} + 2\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \\ &= -x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \end{aligned}$$

× D'où :

$$-x-(1-x)\ln(1-x) = \cancel{-x} - \left(\cancel{-x} + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right) = -\frac{x^2}{2} - \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$

Or : $-\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) = \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$. Ainsi :

$$-x-(1-x)\ln(1-x) = -\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$

□

3. a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$.
Puis calculer $f'(x)$ pour tout x de $]-\infty, 0[\, \cup\,]0, 1[$.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$ car elle est le quotient $\dfrac{f_1}{f_2}$ de :
  - × $f_1 : x \mapsto -x$ qui est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, 1[$,
  - × $f_2 : x \mapsto (1-x)\, \ln(1-x)$ qui :
    - est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$,
    - `NE S'ANNULE PAS` sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est dérivable sur }]-\infty, 0[\, \cup\,]0, 1[.}$$

- Soit $x \in\,]-\infty, 0[\, \cup\,]0, 1[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-1)\,(1-x)\,\ln(1-x) - (-x)\left((-1)\,\ln(1-x) + (1-x)\,\dfrac{-1}{1-x}\right)}{(1-x)^2\,\big(\ln(1-x)\big)^2} \\ &= \frac{(x-1)\,\ln(1-x) + x\big(-\ln(1-x) - 1\big)}{(1-x)^2\,\big(\ln(1-x)\big)^2} \\ &= \frac{(x-1)\,\ln(1-x) - x\,\ln(1-x) - x}{(1-x)^2\,\big(\ln(1-x)\big)^2} \\ &= \frac{-x + \big((\cancel{x}-1) - \cancel{x}\big)\,\ln(1-x)}{(1-x)^2\,\big(\ln(1-x)\big)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in\,]-\infty, 0[\, \cup\,]0, 1[,\ f'(x) = -\frac{x + \ln(1-x)}{(1-x)^2\,\big(\ln(1-x)\big)^2}}$$

□

b) Étudier le signe de la quantité $\ln(1-x) + x$, lorsque x appartient à $]-\infty, 1[$, puis en déduire les variations de f.

Démonstration.

- La fonction $g : x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0, +\infty[$.
Sa courbe représentative $\mathcal{C}_g$ se situe donc sous ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 1. Or cette tangente est la droite d'équation :

$$\begin{aligned} y &= g(1) + g'(1)\,(x-1) \\ &= \ln(1) + \frac{1}{1}\,(x-1) \ = \ x-1 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\forall x \in\,]0, +\infty[, \quad \ln(x) \ \leqslant\ x-1$$

L'égalité n'a lieu qu'au point 1 (le point de tangence). Autrement dit :

$$\forall x \in\,]0, 1[\, \cup\,]1, +\infty[, \quad \ln(x) \ <\ x-1$$

- Soit $t \in \,]-\infty, 0[\, \cup \,]0,1[$.

$$\begin{array}{lccc} & t \in \,]-\infty,0[& \cup &]0,1[\\ \text{donc} & t<0 & \texttt{OU} & 0<t<1 \\ \text{d'où} & -t>0 & \texttt{OU} & 0>-t>-1 \\ \text{puis} & 1-t>1 & \texttt{OU} & 1>1-t>0 \\ \text{ainsi} & 1-t \in \,]1,+\infty[& \cup &]0,1[\end{array}$$

Ainsi : $1-t \in \,]0,1[\, \cup \,]1,+\infty[$. On peut donc appliquer $(*)$ à $x = 1-t$. On obtient :

$$\ln(1-t) \quad < \quad \underset{\underset{-t}{\shortparallel}}{(\cancel{1}-t)-\cancel{1}}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in \,]-\infty,0[\, \cup \,]0,1[,\ \ln(1-t)+t<0.}$$

Commentaire

Pour démontrer l'inégalité ci-dessus, on pouvait également étudier la fonction

$$h : x \mapsto \ln(1-x)+x$$

1) On justifie que h est dérivable sur $]-\infty,1[$,

2) On détermine les variations de h sur $]-\infty,1[$.
On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		1
Signe de $h'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de h		$\nearrow$	$h(0)$	$\searrow$	

3) Comme la fonction h admet un unique maximum en 0, alors :

$$\forall x \in \,]-\infty,0[\, \cup \,]0,1[, \quad h(x) \ < \ h(0) = 0$$

Autrement dit : $\forall x \in \,]-\infty,0[\, \cup \,]0,1[$, $\ln(1-x)+x<0$.

- Soit $x \in \,]-\infty,0[\, \cup \,]0,1[$.
  - × D'après ce qui précède : $\ln(1-x)+x<0$.
  - × De plus : $(1-x)^2\left(\ln(1-x)\right)^2>0$.

  On obtient :

$$f'(x) \ = \ -\frac{x+\ln(1-x)}{(1-x)^2\left(\ln(1-x)\right)^2} \ > \ 0$$

De plus, d'après la question précédente : $f'(0)>0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \,]-\infty,1[,\ f'(x)>0.}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la fonction } f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty,1[.}$$

□

c) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, puis dresser son tableau de variations.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$f(x) \;=\; \frac{-x}{(1-x)\,\ln(1-x)} \;\underset{x\to-\infty}{\sim}\; \frac{\cancel{-x}}{\cancel{-x}\times\ln(1-x)} \;=\; \frac{1}{\ln(1-x)}$$

Or, avec le changement de variable $u = 1-x$:

$$\lim_{x\to-\infty} \ln(1-x) \;=\; \lim_{u\to+\infty} \ln(u) \;=\; +\infty$$

Ainsi : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\ln(1-x)} = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.}$$

- De plus :
  - × d'une part : $\displaystyle\lim_{x\to1} -x = -1$,
  - × d'autre part, toujours avec le changement de variable $u = 1-x$:

$$\lim_{x\to1^-} (1-x)\,\ln(1-x) \;=\; \lim_{u\to0^+} u\,\ln(u) \;=\; 0 \qquad \textit{(par croissances comparées)}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Comme on sait par ailleurs que le dénominateur est négatif au voisinage de 1,}\\ \text{on en déduit : } \displaystyle\lim_{x\to1} f(x) = +\infty.\end{array}}$$

- D'après les questions précédentes, on en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		1
Signe de $f'(x)$		$+$		$+$	‖
Variations de f	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

□

4. a) Établir que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe un seul réel de $[0,1[$, noté u_n, tel que $f(u_n) = n$ et donner la valeur de u_1.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est :
  - × continue sur $[0,1[$ (d'après ***2.a)***),
  - × strictement croissante sur $[0,1[$ (d'après ***3.b)***).

  Ainsi, la fonction f réalise une bijection de $[0,1[$ sur $f\big([0,1[\big)$ où :

$$f\big([0,1[\big) \;=\; \Big]f(0), \lim_{x\to1} f(x)\Big[\;=\; [1,+\infty[$$

Or : $n \in [1,+\infty[$ (car $n \in \mathbb{N}^*$).

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ l'équation } f(x) = n \text{ admet}\\ \text{une unique solution } u_n \text{ dans } [0,1[.\end{array}}$$

- Par définition, le réel u_1 est **l'unique** solution de l'équation $f(x) = 1$ sur $[0, 1[$.
  Or $0 \in [0, 1[$ est solution de cette équation. En effet, par définition de f : $f(0) = 1$.

  On en déduit : $u_1 = 0$.

□

b) Montrer que la suite (u_n) converge et : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n < 1$.

  La suite (u_n) est donc bornée.

- Pour montrer qu'elle est convergente, il suffit alors de démontrer qu'elle est monotone.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  - × Par définition de u_n et u_{n+1} :
  $$f(u_n) = n \ \leqslant \ n + 1 = f(u_{n+1})$$
  - × Or, d'après la question précédente, la fonction f réalise une bijection de $[0, 1[$ sur $[1, +\infty[$.
  D'après le théorème de la bijection, $f^{-1} : [1, +\infty[\to [0, 1[$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
  En appliquant f^{-1}, on obtient alors :
  $$\begin{array}{ccc} f^1\big(f(u_n)\big) & \leqslant & f^{-1}\big(f(u_{n+1})\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ u_n & & u_{n+1} \end{array}$$

  Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc croissante.

- La suite (u_n) est :
  - × croissante,
  - × majorée par 1.

  La suite (u_n) est donc convergente de limite $\ell \in [0, 1]$.

Commentaire

- On rappelle que, par passage à la limite, les inégalités strictes deviennent **larges**.
  Plus précisément :
  $$\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n > a \\ u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \ell \geqslant a$$
- On pourra retenir l'exemple classique de la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$:
  - × d'une part : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} > 0$
  - × d'autre part : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \not> 0$

- Démontrons par l'absurde : $\ell = 1$.
  Supposons que $\ell \in [0, 1[$.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de (u_n) :
  $$f(u_n) = n$$
  Par passage à la limite, on obtient :
  × d'une part, comme la fonction f est continue en ℓ (car $\ell \in [0, 1[$) : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.
  × d'autre part : $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.
  Ainsi : $f(\ell) = +\infty$.
  Absurde ! (car $f(\ell) \in \mathbb{R}$)

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{n\to+\infty} u_n = 1.}$$

Commentaire

- On pouvait également déterminer la limite de la suite (u_n) en composant par f^{-1}.
  × Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  $$\begin{array}{lrcl} & f(u_n) & = & n \\ \text{donc} & f^{-1}\big(f(u_n)\big) & = & f^{-1}(n) \\ \text{d'où} & u_n = f^{-1}(n) \end{array}$$
  × Or : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$. D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = 1$. Ainsi :
  $$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$
- Les questions ***4.a)*** et ***4.b)*** consistent en l'étude de la suite (u_n). On parle ici de « suite implicite » car on n'a pas accès à la définition explicite de la suite (u_n) mais simplement à la propriété qui permet de définir chacun de ses termes, à savoir :

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est l'unique solution dans $[0, 1[$ de l'équation $f(x) = n$

  On comprend alors que l'étude de (u_n) va passer par l'étude des propriétés de la fonction f.
- De cette définition, on tire la propriété : $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ f(u_m) = m}$.
  Cette propriété est au cœur de l'étude de la suite implicite (u_n).
  C'est de cette propriété dont on se sert ici (en $m = n$ et $m = n + 1$) pour démontrer la monotonie de la suite (u_n). Comme la suite (u_n) est définie de manière implicite, cette étude ne se réalise pas directement en étudiant la différence $u_{n+1} - u_n$. Il est par contre très classique de passer par l'inégalité :
  $$f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$$
  et de conclure : $u_n \leqslant u_{n+1}$ à l'aide d'une propriété de f. □

c) Pour tout entier naturel n non nul, calculer $f\left(1-\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ puis en déduire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, on a : $u_n \leqslant 1-\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Deux cas se présentent :
  - × si $n=1$, alors :

$$f\left(1-\frac{1}{1\times\sqrt{1}}\right) \;=\; f(0) \;=\; 1$$

$$\boxed{\text{Si } n=1 : f\left(1-\frac{1}{1\times\sqrt{1}}\right)=1}$$

  - × si $n \geqslant 2$, alors :

$$\begin{aligned}
f\left(1-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) &= \frac{-\left(1-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}{\left(\cancel{1}-\left(\cancel{1}-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)\ln\left(\cancel{1}-\left(\cancel{1}-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{n\sqrt{n}}-1}{\frac{1}{n\sqrt{n}}\ \ln\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)} \\
&= \frac{n\sqrt{n}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}-1\right)}{-\ln(n\sqrt{n})} \\
&= -\frac{1-n\sqrt{n}}{\ln(n)+\frac{1}{2}\ \ln(n)} \\
&= \frac{n\sqrt{n}-1}{\frac{3}{2}\ \ln(n)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n\geqslant 2 : f\left(1-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)=\frac{2}{3}\ \frac{n\sqrt{n}-1}{\ln(n)}.}$$

- Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}
u_n \leqslant 1-\frac{1}{n\sqrt{n}} &\Leftrightarrow f(u_n) \leqslant f\left(1-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) && \textit{(car } f \textit{ est strictement croissante sur } [0,1[\textit{)} \\
&\Leftrightarrow n \leqslant \frac{2}{3}\,\frac{n\sqrt{n}-1}{\ln(n)} && \textit{(d'après le point précédent, car } n\geqslant 2\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \frac{3}{2} \leqslant \frac{n\sqrt{n}-1}{n\ \ln(n)} && \textit{(car } n>0\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \frac{3}{2} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}-\frac{1}{n\ \ln(n)} && (*)
\end{aligned}$$

- Or :
  - × d'une part : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ \ln(n) = +\infty$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n\ \ln(n)} = 0$.
  - × d'autre part, avec le changement de variable $u = \sqrt{n}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} = \lim_{u\to+\infty} \frac{u}{\ln(u^2)} = \lim_{u\to+\infty} \frac{u}{2\ \ln(u)} = +\infty \qquad \textit{(par croissance comparées)}$$

  Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\ln(n)} - \dfrac{1}{n\ \ln(n)} = +\infty$.
  On en déduit que, pour tout $A \geqslant 0$, il existe $n_0 \geqslant 2$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} - \frac{1}{n\ \ln(n)} \geqslant A$$

  En particulier, pour $A = \dfrac{3}{2}$, il existe $n_0 \geqslant 2$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} - \frac{1}{n\ \ln(n)} \geqslant \frac{3}{2}$$

- Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$, l'assertion $(*)$ est vraie. D'où, par équivalence, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$u_n \leqslant 1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$\boxed{\text{Il existe } n_0 \geqslant 2 \text{ tel que, pour tout } n \geqslant n_0 : u_n \leqslant 1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}.}$$

Commentaire

- On utilise dans cette 2ème partie de question la définition de la divergence d'une suite vers $+\infty$. Rappelons la.
- Soit (v_n) une suite de réels.

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \geqslant 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0) \Rightarrow (v_n \geqslant A)$$

□

d) En déduire, à l'aide de la première question, que la série de terme général $\dfrac{1}{-n\ \ln(1-u_n)}$ est divergente.

Démonstration.

- Tout d'abord, soit $n \geqslant n_0$ (où $n_0 \geqslant 2$ est l'entier défini en question précédente) :

$$u_n \leqslant 1 - \frac{1}{n\sqrt{n}} \qquad \textit{(d'après la question précédente)}$$

donc $$1 - u_n \geqslant \cancel{1} - \left(\cancel{1} - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

d'où $$\ln(1-u_n) \geqslant \ln\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = -\frac{3}{2}\ \ln(n) \qquad \textit{(par stricte croissance de } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)}$$

puis $$-n\ \ln(1-u_n) \leqslant \frac{3}{2}\, n\ \ln(n)$$

ainsi $$\frac{1}{-n\ \ln(1-u_n)} \geqslant \frac{2}{3}\ \frac{1}{n\ \ln(n)} \qquad \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)}$$

- On obtient donc :
  - × $\forall n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant \dfrac{2}{3}\, a_n \leqslant \dfrac{1}{-n\, \ln(1-u_n)}$
  - × la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} a_n$ est divergente d'après la question ***1.***. Il en est de même de la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} \dfrac{2}{3}\, a_n$.

    (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par $\dfrac{2}{3} \neq 0$*)*

> Par critère de comparaison des séries à termes positifs,
> la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{-n\, \ln(1-u_n)}$ est divergente.

Commentaire

- L'énoncé est très clair : il s'agit de déterminer la nature d'une série sans effectuer de calcul de somme. Cela ne laisse d'autre choix que de mettre en place un critère de comparaison / équivalence / négligeabilité des séries à termes positifs.
- En toute rigueur, comme l'encadrement :

$$0 \leqslant \frac{2}{3}\, a_n \leqslant \frac{1}{-n\, \ln(1-u_n)}$$

n'est valable que pour $n \geqslant n_0$, on devrait conclure que la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} \dfrac{1}{-n\, \ln(1-u_n)}$ est divergente. Cependant, on ne change pas la nature d'une série en lui ajoutant un nombre fini de termes. Ainsi, la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{-n\, \ln(1-u_n)}$ est bien divergente. □

e) Conclure, en revenant à la définition de u_n, que la série de terme général $1 - u_n$ est divergente.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de u_n :

$$\begin{array}{lrcl} & f(u_n) & = & n \\ \text{donc} & \dfrac{-u_n}{(1-u_n)\, \ln(1-u_n)} & = & n \\ \text{d'où} & \dfrac{-u_n}{n\, \ln(1-u_n)} & = & 1-u_n \end{array}$$

- Ainsi, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$, alors : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} 1$. D'où :

$$1 - u_n = \frac{-u_n}{n\, \ln(1-u_n)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{-1}{n\, \ln(1-u_n)} = \frac{1}{-n\, \ln(1-u_n)}$$

- On obtient :
  - × $1 - u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{-n\, \ln(1-u_n)} \geqslant 0$
  - × la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{-n\, \ln(1-u_n)}$ est divergente d'après la question précédente.

> Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} (1-u_n)$ est divergente. □