DM2 (version A)

Soit $\alpha > 0$ et $\sum u_n$ une série convergente à termes strictement positifs.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et, si $n \geqslant 2$, $v_n = \dfrac{u_n}{(R_{n-1})^\alpha}$.

Commentaire

- Dans cet énoncé, on considère une série $\sum u_n$ convergente. Notons (S_n) la suite des sommes partielles et S la somme associées à cette série. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut alors définir le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$ par :

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \quad (*)$$

Ce que l'on peut encore écrire, en réordonnant :

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k}_{S} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_k}_{S_n} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k}_{R_n}$$

- Il est aisé de démontrer que la suite (R_n) est convergente.
En effet, d'après $(*)$, le terme général R_n apparaît comme la différence de :
  × S qui admet une limite finie en $+\infty$ ($\lim\limits_{n\to+\infty} S = S$),
  × S_n qui admet une limite finie en $+\infty$ ($\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$).

Dès lors : $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S - \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S - S = 0$.

1. **On supposera dans cette question que $u_n = \dfrac{1}{2^n}$.**

a) Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer R_n.

Démonstration.

- La série $\sum \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ converge en tant que série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in \,]-1, 1[$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition : $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \lim\limits_{m\to+\infty} \left(\sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k\right)$.
- Or, pour tout $m \in [\![n+1, +\infty[\![$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{m} u_k &= \sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{1 - \frac{1}{2}} \qquad \textit{(car } \tfrac{1}{2} \neq 1\textit{)} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{\frac{1}{2}} \\
&= 2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{m}
\end{aligned}$$

Or :

× $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$,

× $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = 0$ car $\frac{1}{2} \in \,]-1,1[$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ R_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.}$$

Commentaire

On retrouve bien évidemment la propriété énoncée dans la première remarque, à savoir :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

□

b) En déduire v_n, puis donner une condition sur α pour que $\sum v_n$ converge.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Par définition :

$$v_n = \frac{u_n}{(R_{n-1})^\alpha} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)^\alpha} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n\alpha-\alpha}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n\alpha+\alpha} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(1-\alpha)\,n+\alpha} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha$$

- On ne modifie pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul. Or : $\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha \neq 0$. On en déduit que la série $\sum v_n$ est convergente si et seulement si la série $\sum \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}\right)^n$ l'est. Notons $t_n = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}\right)^n$ le terme général de cette série.

- La série $\sum t_n$ est une série géométrique de raison $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha} > 0$.

  Elle est convergente si et seulement si : $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha} \in \,]0,1[$.

Or :
$$\begin{aligned}
0 < \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha} < 1 \ &\Leftrightarrow\ \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}\right) < \ln(1) && \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow\ (1-\alpha)\ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \\
&\Leftrightarrow\ -(1-\alpha)\ln(2) < 0 \\
&\Leftrightarrow\ 1-\alpha > 0 && \textit{(en multipliant par : } -\ln(2) < 0) \\
&\Leftrightarrow\ \alpha < 1
\end{aligned}$$

On rappelle enfin que, par définition : $\alpha > 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \sum v_n \text{ converge si et seulement si } \alpha \in \,]0,1[.}$$

□

Désormais, on ne suppose plus que $u_n = \dfrac{1}{2^n}$ et on traite le cas général.

2. Exprimer v_n en fonction de R_n, R_{n-1} et α.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$. Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned} R_{n-1} - R_n &= \sum_{k=n}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \\ &= \left(u_n + \cancel{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k}\right) - \cancel{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k} \ = \ u_n \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ u_n = R_{n-1} - R_n}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \geqslant 2,\ v_n \ = \ \frac{u_n}{(R_{n-1})^\alpha} \ = \ \frac{R_{n-1} - R_n}{(R_{n-1})^\alpha}.}$$

□

3. En prenant $\alpha = 1$,

a) exprimer $\ln(1 - v_n)$ en fonction de $\ln(R_n)$ et de $\ln(R_{n-1})$.

Démonstration.
On suppose $\alpha = 1$. Soit $n \geqslant 2$.

- D'après la question précédente :

$$v_n = \frac{R_{n-1} - R_n}{(R_{n-1})^1} \ = \ \frac{R_{n-1}}{R_{n-1}} - \frac{R_n}{R_{n-1}} \ = \ 1 - \frac{R_n}{R_{n-1}}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \geqslant 2,\ 1 - v_n = \cancel{1} - \left(\cancel{1} - \frac{R_n}{R_{n-1}}\right) = \frac{R_n}{R_{n-1}}.}$$

- Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k > 0$ (par hypothèse) alors :

$$R_n > 0 \quad \text{et} \quad R_{n-1} > 0 \qquad \left(\begin{array}{l}\textit{comme sommes de quantités}\\ \textit{strictement positives}\end{array}\right)$$

On en déduit : $1 - v_n > 0$ et :

$$\ln(1 - v_n) \ = \ \ln\left(\frac{R_n}{R_{n-1}}\right) \ = \ \ln(R_n) - \ln(R_{n-1})$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \ln(1 - v_n) \ = \ \ln(R_n) - \ln(R_{n-1})}$$

□

b) en déduire la nature de $\sum v_n$.

Démonstration.
Deux cas se présentent :

– si $v_n \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$, alors la série $\sum v_n$ est (grossièrement) divergente.

$$\boxed{\text{Dans ce cas, la série } \sum v_n \text{ diverge.}}$$

– si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors :

$$\ln(1-v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -v_n \quad \text{et ainsi} \quad -\ln(1-v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

On a :

× $\forall n \geqslant 2,\ -\ln(1-v_n) \geqslant 0$ et $v_n \geqslant 0$

× $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(1-v_n)$

× La série $\sum -\ln(1-v_n)$ diverge. En effet, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\Big(-\ln(1-v_k)\Big) &= \sum_{k=2}^{n}\Big(\ln(R_{k-1}) - \ln(R_k)\Big) \\ &= \ln(R_1) - \ln(R_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \qquad \textit{(car } R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\textit{)}\end{aligned}$$

Ainsi, par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum v_n$ diverge.

$\boxed{\text{Dans ce cas, la série } \sum v_n \text{ diverge.}}$

$\boxed{\text{Les deux cas considérés amenant le même résultat, on en déduit que la série } \sum v_n \text{ diverge.}}$

Commentaire

- La propriété : $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$ (convergence vers 0 de la suite des restes d'une série **convergente**) est considérée comme classique. Il n'est pas forcément nécessaire de refaire cette démonstration si elle n'est pas explicitement demandée.
- Il faut par contre savoir faire cette démonstration car cela peut faire l'objet d'une question séparée. On renvoie le lecteur à la première
- On démontre dans cette question que la série $\sum \left(1 - \dfrac{R_n}{R_{n-1}}\right)$ est convergente. Ce résultat ne dépend pas de la valeur de α considérée (c'est le terme général v_n qui présente une dépendance en α et pas R_n). On pourra donc utiliser de nouveau ce résultat en ***4.b)***.

□

4. On suppose : $\alpha > 1$.

a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant N$: ${R_{n-1}}^{\alpha} \leqslant R_{n-1}$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Remarquons tout d'abord :

$${R_{n-1}}^{\alpha} \leqslant R_{n-1} \Leftrightarrow (R_{n-1})^{\alpha-1} \leqslant 1 \qquad \textit{(car } R_{n-1} > 0 \textit{ d'après la question } \textbf{\textit{3.a)}}\textit{)}$$

- Or :

$$\begin{aligned}{R_{n-1}}^{\alpha-1} \leqslant 1 &\Leftrightarrow \ln\Big((R_{n-1})^{\alpha-1}\Big) \leqslant \ln(1) && \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ &\Leftrightarrow (\alpha-1)\ \ln(R_{n-1}) \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(R_{n-1}) \leqslant 0 && \textit{(car } \alpha - 1 > 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow R_{n-1} \leqslant \mathrm{e}^0 = 1 && \textit{(par stricte croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)}\end{aligned}$$

- Par ailleurs, on sait : $\lim\limits_{n \to +\infty} R_{n-1} = 0$. Ainsi, la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geqslant N, \ |R_{n-1} - 0| < \varepsilon$$

En prenant $\varepsilon = 1$, on obtient qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N, \ |R_{n-1}| \ = \ R_{n-1} \ < \ 1$$

- Or, comme $\alpha - 1 > 0$, la fonction $x \mapsto x^{\alpha-1}$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
On en déduit que pour tout $n \geqslant N$, on a :

$$(R_{n-1})^{\alpha-1} \ < \ 1^{\alpha-1} = 1$$

Finalement, on a bien démontré qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N$, $R_{n-1}{}^{\alpha} \ \leqslant \ R_{n-1}$.

Commentaire

- On demande ici d'exhiber un rang à partir duquel une propriété est vérifiée. Il est alors assez naturel de penser à utiliser la notion de convergence car elle énonce une majoration à partir d'un certain rang.
- Cette question est à considérer comme difficile car elle demande de prendre des initiatives qui ne sont pas suggérées dans l'énoncé. Ce type de questions est présente essentiellement dans les sujets de TOP3. Les sujets du TOP5 présentent généralement un découpage en sous-questions plus précis, ce qui explique en partie pourquoi ces sujets sont plus simples.

□

b) En déduire la nature de la série $\sum v_n$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant N$.

- Tout d'abord :

$$(R_{n-1})^{\alpha} \ \leqslant \ R_{n-1} \qquad \textit{(d'après la question précédente et car } n \geqslant N\textit{)}$$

donc $$\frac{1}{(R_{n-1})^{\alpha}} \ \geqslant \ \frac{1}{R_{n-1}} \qquad \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0, +\infty[\textit{)}$$

ainsi $$\frac{u_n}{(R_{n-1})^{\alpha}} \ \geqslant \ \frac{u_n}{R_{n-1}} \ \geqslant \ 0 \qquad \textit{(car } u_n > 0 \textit{ et } R_{n-1} > 0\textit{)}$$

enfin $$v_n \ \geqslant \ \frac{R_{n-1} - R_n}{R_{n-1}} \ \geqslant \ 0 \qquad \textit{(par définition de } v_n \textit{ et comme } R_{n-1} - R_n = u_n\textit{)}$$

- Finalement :
  × $\forall n \geqslant N$, $0 \leqslant 1 - \dfrac{R_n}{R_{n-1}} \leqslant v_n$
  × La série $\sum \left(1 - \dfrac{R_n}{R_{n-1}}\right)$ est divergente d'après la question ***3.a)***.

  Ainsi, par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \ v_n$ est divergente.

La série $\sum \ v_n$ est divergente.

□

5. On suppose : $0 < \alpha < 1$.

a) Calculer $\displaystyle\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{1}{t^\alpha} \, dt$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue sur le **segment** $[R_n, R_{n-1}]$.
  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{1}{t^\alpha} \, dt$ est bien définie.

Commentaire

- On remarque au passage que la suite (R_n) des restes de la série à termes positifs $\sum u_n$ est une suite décroissante. C'est une conséquence direct du lien de l'expression du terme u_n en fonction des termes de la suite (R_n). Plus précisément, on a vu en question ***2.*** que pour tout $n \geqslant 2$:
$$R_n - R_{n-1} = -u_n \leqslant 0$$
- Rappelons que la continuité d'une fonction h sur un **segment** $[a, b]$ est une condition suffisante pour conclure que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b h(t) \, dt$ est bien définie. Le terme **segment** doit être mis en avant lors de la rédaction car il démontre la bonne compréhension de l'argument utilisé. Notons que cette condition n'est pas nécessaire : le chapitre d'intégration sera l'occasion de présenter des cadres moins stricts permettant la manipulation d'intégrales.

- Par ailleurs :
$$\begin{aligned} \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{1}{t^\alpha} \, dt &= \int_{R_n}^{R_{n-1}} t^{-\alpha} \, dt \\ &= \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_{R_n}^{R_{n-1}} && \textit{(car } -\alpha + 1 \neq 0\textit{)} \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left[t^{1-\alpha} \right]_{R_n}^{R_{n-1}} \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left((R_{n-1})^{1-\alpha} - (R_n)^{1-\alpha} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \ \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{1}{t^\alpha} \, dt = \frac{1}{1-\alpha} \left((R_{n-1})^{1-\alpha} - (R_n)^{1-\alpha} \right)}$$

□

b) En déduire la nature de $\sum v_n$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Soit $t \in [R_n, R_{n-1}]$ (rappelons : $R_{n-1} - R_n = u_n > 0$).

$$\begin{array}{lccccc} \text{comme} & R_n & \leqslant & t & \leqslant & R_{n-1} \\ \text{alors} & \dfrac{1}{R_n} & \geqslant & \dfrac{1}{t} & \geqslant & \dfrac{1}{R_{n-1}} \\ \text{ainsi} & \left(\dfrac{1}{R_n}\right)^\alpha & \geqslant & \left(\dfrac{1}{t}\right)^\alpha & \geqslant & \left(\dfrac{1}{R_{n-1}}\right)^\alpha \end{array}$$

(par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$*)*

(car comme $\alpha > 0$*, la fonction* $x \mapsto x^\alpha$ *est croissante sur* $]0, +\infty[$*)*

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($R_n \leqslant R_{n-1}$) :

$$\int_{R_n}^{R_{n-1}} \left(\frac{1}{R_n}\right)^\alpha dt \geqslant \int_{R_n}^{R_{n-1}} \left(\frac{1}{t}\right)^\alpha dt \geqslant \int_{R_n}^{R_{n-1}} \left(\frac{1}{R_{n-1}}\right)^\alpha dt$$

$$\int_{R_n}^{R_{n-1}} \left(\frac{1}{R_n}\right)^\alpha dt = \left(\frac{1}{R_n}\right)^\alpha (R_{n-1} - R_n)$$

$$\int_{R_n}^{R_{n-1}} \left(\frac{1}{R_{n-1}}\right)^\alpha dt = \left(\frac{1}{R_{n-1}}\right)^\alpha (R_{n-1} - R_n) = \frac{u_n}{(R_{n-1})^\alpha}$$

- Finalement, on a :
  × $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{1-\alpha} \Big((R_{n-1})^{1-\alpha} - (R_n)^{1-\alpha} \Big)$
  × La série $\sum \Big((R_{n-1})^{1-\alpha} - (R_n)^{1-\alpha} \Big)$ est convergente.
  En effet, pour tout $n \geqslant 2$, on a :

$$\sum_{k=2}^{n} \Big((R_{k-1})^{1-\alpha} - (R_k)^{1-\alpha} \Big) = (R_1)^{1-\alpha} - (R_n)^{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (R_1)^{1-\alpha}$$

  car, par composition de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} (R_n)^{1-\alpha} = 0$.

  Ainsi, par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum v_n$ est convergente.

$$\boxed{\text{Si } 0 < \alpha < 1, \text{ la série } \sum v_n \text{ est convergente.}}$$

□