

---

## DM2 (version B)

---

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} \times u_n \end{cases}$$

1. Démontrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ .

2. Écrire une fonction **Scilab** ayant pour argument  $n$  et renvoyant  $\sum_{k=0}^n u_k$ .

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On définit la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}$$

2. a) Rappeler le développement limité à l'ordre deux au voisinage de 0 de  $x \mapsto \ln(1+x)$ .

b) Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(v_n) = (\alpha+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{5}{2n}\right)$ .

c) Pour quelle valeur  $\alpha_0$  du réel  $\alpha$  la série de terme général  $\ln(v_n)$  est-elle convergente ?

3. a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , expliciter  $\sum_{k=1}^n \ln(v_k)$  sans signe  $\sum$ .

b) En déduire qu'il existe un réel strictement positif  $C$  tel que :  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{n^{\alpha_0}}$ .

c) Que peut-on en déduire pour la série  $\sum u_n$  ?

4. a) Établir pour tout entier naturel  $n$ , la relation :

$$2 \sum_{k=1}^{n+1} k u_k + 3 \sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2 \sum_{k=0}^n k u_k + 2 \sum_{k=0}^n u_k$$

b) En déduire la valeur de  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .