DM3 (version A)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On lance n fois une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant « pile » avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et « face » également avec la probabilité $\frac{1}{2}$), les lancers étant supposés indépendants.
On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun « pile » pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier « pile ».

1. ***a)*** Déterminer, en argumentant soigneusement, l'ensemble $Z(\Omega)$.

b) Pour tout k de $Z(\Omega)$, calculer $\mathbb{P}(\,[Z = k]\,)$. On distinguera les cas $k = 0$ et $k \geqslant 1$.

c) Vérifier : $\sum\limits_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}(\,[Z = k]\,) = 1$.

d) À quoi sert la commande `grand(1, 1, 'bin', 1, 0.5)` ?
Recopier et compléter la fonction suivante, prenant en paramètre l'entier `n`, pour qu'elle simule l'expérience décrite ci-dessus (« pile » sera codé par le nombre 1 et « face » par 0).

```
function z = exp1(n)
    k = 0
    z = 0
    lancer = 0
    while lancer == 0 & .............
        lancer = grand(1, 1, 'bin', 1, 0.5)
        if lancer == 1 then
            ...............
        end
        ...............
    end
endfunction
```

On dispose de $n + 1$ urnes $U_0, U_1, ..., U_n$ telles que, pour tout k de $\{0, 1, ..., n\}$, l'urne U_k contient k boules blanches et $n - k$ boules noires.
On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes, de la façon suivante :

- Si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable Z prend la valeur k (avec $k \geqslant 1$), alors on tire une par une et avec remise, k boules dans l'urne U_k et l'on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de ces tirages.
- Si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

2. Déterminer $X(\Omega)$.

3. Soit $i \in X(\Omega)$.

a) Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[Z=0]}(\,[X = i]\,)$.

b) Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[Z=n]}(\,[X = i]\,)$.

c) Pour tout k de $\{1, 2, ..., n - 1\}$ déterminer, en distinguant les cas $0 \leqslant i \leqslant k$ et $k < i \leqslant n$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[Z=k]}(\,[X = i]\,)$.

4. ***a)*** Démontrer : $\mathbb{P}(\,[X=0]\,) = \dfrac{1}{2^n} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\dfrac{n-k}{2n}\right)^k$.

b) Démontrer : $\mathbb{P}(\,[X=n]\,) = \dfrac{1}{2^n}$.

c) Exprimer, pour tout i de $\{1, 2, ..., n-1\}$, $\mathbb{P}(\,[X=i])$ sous forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à réduire.

5. Vérifier, avec les expressions trouvées à la question précédente, que $\sum\limits_{i=0}^{n} \mathbb{P}(\,[X=i]\,) = 1$.

6. ***a)*** Comment peut-on simuler le fait de tirer une boule blanche dans une urne contenant k boules blanches et $n-k$ boules noires ? (on pourra utiliser la fonction `grand`)

b) En déduire une fonction qui simule la variable aléatoire X. On devra faire appel à la fonction `exp1` définie dans l'énoncé.