DM3 (version A)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On lance n fois une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant « pile » avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et « face » également avec la probabilité $\frac{1}{2}$), les lancers étant supposés indépendants.
On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun « pile » pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier « pile ».

1. a) Déterminer, en argumentant soigneusement, l'ensemble $Z(\Omega)$.

Démonstration.
On procède par double inclusion.

($\subset$) On lance n fois une pièce. Ainsi, on peut ne jamais obtenir de Pile ou obtenir le premier Pile au plus tard au $n^{\text{ème}}$ lancer.
On en déduit : $Z(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$.

($\supset$) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Deux cas se présentent :

× si $k = 0$, alors le n-tirage suivant réalise l'événement $[Z = 0]$:

$$\omega_0 \; = \; (\text{Face, Face, } \ldots, \text{ Face})$$

On en déduit : $\omega_0 \in [Z = 0]$, *i.e.* $Z(\omega_0) = 0$. D'où : $0 \in Z(\Omega)$.

× si $k \in [\![1, n]\!]$, alors le n-tirage suivant réalise l'événement $[Z = k])$:

$$\omega_k \; = \; (\underbrace{\text{Face, } \ldots, \text{ Face}}_{k-1 \text{ fois}}, \text{ Pile, } \ldots, \text{ Pile})$$

On en déduit : $\omega_k \in [Z = k]$, *i.e.* $Z(\omega_k) = k$. D'où : $k \in Z(\Omega)$.

Finalement : $[\![0, n]\!] \subset Z(\Omega)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Z(\Omega) = [\![0, n]\!].}$$

Commentaire

On exhibe pour l'inclusion $[\![0, n]\!] \subset Z(\Omega)$ des n-tirages réalisant certains événements. Il suffit d'exhiber un n-tirage précis pour chaque événement, mais il en existe bien sûr plusieurs. À titre d'exemple, l'événement $[Z = 3]$ est réalisé par chacun des tirages suivants :

$$(\text{Face, Face, Pile, Pile, } \ldots, \text{ Pile})$$ *(tirage proposé dans la démonstration)*

$$(\text{Face, Face, Pile, Face, } \ldots, \text{ Face})$$

$$(\text{Face, Face, Pile, Face, Pile, } \ldots, \text{ Pile})$$

$$\ldots$$

□

b) Pour tout k de $Z(\Omega)$, calculer $\mathbb{P}(\,[Z=k]\,)$. On distinguera les cas $k=0$ et $k\geqslant 1$.

Démonstration.

- Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on considère les événements suivants :
  - × P_i : « on obtient Pile au $i^{\text{ème}}$ lancer »,
  - × F_i : « on obtient Face au $i^{\text{ème}}$ lancer »
- Soit $k\in[\![0,n]\!]$. Deux cas se présentent :
  - × si $k=0$, alors l'événement $[Z=0]$ est réalisé si et seulement si on n'obtient que des Face au cours des n lancers. Ainsi :

$$[Z=0] \;=\; F_1\cap F_2\cap\cdots\cap F_n \;=\; \bigcap_{i=1}^{n} F_i$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Z=0]) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(F_i) && \textit{(car les lancers sont indépendants)} \\ &= \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2} && \textit{(car la pièce est équilibrée)} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}(\,[Z=0]\,) \;=\; \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

  - × si $k\in[\![1,n]\!]$, alors l'événement $[Z=k]$ est réalisé si et seulement si on n'obtient que des Face lors des $k-1$ premiers lancers et Pile au $k^{\text{ème}}$. Ainsi :

$$[Z=k] \;=\; F_1\cap\cdots\cap F_{k-1}\cap P_k \;=\; \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} F_i\right)\cap P_k$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Z=k]) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} F_i\right)\cap P_k\right) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{k-1}\mathbb{P}(F_i)\right)\times\mathbb{P}(P_k) && \textit{(car les lancers sont indépendants)} \\ &= \left(\prod_{i=1}^{k-1}\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2} && \textit{(car la pièce est équilibrée)} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\times\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k\in[\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(\,[Z=k]\,) \;=\; \left(\frac{1}{2}\right)^k}$$

Commentaire

On aurait également pu répondre à cette question à l'aide de dénombrement puisque, comme la pièce est équilibrée, on est en situation d'équiprobabilité.

- Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble $\{\text{Pile}, \quad \text{Face}\}$. On a : $\text{Card}\left(\mathcal{C}\right) = 2$.
  L'univers Ω est l'ensemble des n-uplets d'éléments de $\mathcal{C}$.
  Autrement dit : $\Omega = \mathcal{C}^n$ et ainsi : $\text{Card}(\Omega) = \Big(\text{Card}\left(\mathcal{C}\right)\Big)^n = 2^n$.
  Dans la suite, un tel n-uplet sera nommé n-tirage.
- Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
  L'événement $[Z = k]$ est réalisé par tous les n-tirages dont les $k-1$ premiers éléments sont des Face, dont le $k^{\text{ème}}$ est Pile et dont les autres éléments sont libres (Pile ou Face).
  Les k premiers éléments étant fixés, un n-tirage réalisant l'événement $[Z = k]$ est entièrement déterminé par :
  - l'élément de $\mathcal{C}$ apparaissant en $(k+1)^{\text{ème}}$ position : $\binom{2}{1} = 2$ possibilités.
  - ...
  - l'élément de $\mathcal{C}$ apparaissant en $n^{\text{ème}}$ position : $\binom{2}{1} = 2$ possibilités.

  Il y a donc :
$$\underbrace{2 \times \cdots \times 2}_{n - (k + \cancel{1}) + \cancel{1} = n - k \text{ fois}} \quad = \quad 2^{n-k} \quad \text{tels } n\text{-tirages}$$
  On obtient :
$$\mathbb{P}([Z = k]) \ = \ \frac{\text{Card}(\,[Z = k]\,)}{\text{Card}(\Omega)} \ = \ \frac{2^{n-k}}{2^n} \ = \ 2^{-k} \ = \ \frac{1}{2^k} \ = \ \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

☐

c) Vérifier : $\displaystyle\sum_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}(\,[Z = k]\,) = 1$.

Démonstration.
D'après la question précédente :
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Z = k]) &= \mathbb{P}([Z = 0]) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([Z = k]) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^1} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\cancel{1 - \frac{1}{2}}} \qquad \textit{(car } \frac{1}{2} \neq 1\textit{)} \\
&= \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^n} + 1 - \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\,[Z = k]\,) = 1.}$$

☐

d) À quoi sert la commande `grand(1, 1, 'bin', 1, 0.5)` ?
Recopier et compléter la fonction suivante, prenant en paramètre l'entier `n`, pour qu'elle simule l'expérience décrite ci-dessus (« pile » sera codé par le nombre 1 et « face » par 0).

```
1  function z = exp1(n)
2      k = 0
3      z = 0
4      lancer = 0
5      while lancer == 0 & ............
6          lancer = grand(1, 1, 'bin', 1, 0.5)
7          if lancer == 1 then
8              ...............
9          end
10         ...............
11     end
12 endfunction
```

Démonstration.

- L'appel `grand(1, 1, 'bin', 1, 0.5)` renvoie une simulation d'une v.a.r. suivant la loi $\mathcal{B}(1, 0.5)$, c'est-à-dire la loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.
- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `exp1`,
  × elle prend en entrée le paramètre `n`,
  × elle admet pour variable de sortie `z`.

```
1  function z = exp1(n)
```

  On initialise ensuite la variable `k` à 0. Cette variable correspond au nombre de lancers effectués.

```
2      k = 0
```

  La variable `z` est initialisée à 0. Cette variable contiendra une simulation de la v.a.r. Z.

```
3      z = 0
```

  Enfin, la variable `lancer` est initialisée à 0.

```
4      lancer = 0
```

- **Structure itérative**
  × Les lignes 5 à 11 consistent à mettre à jour la variable `z` pour qu'elle contienne une réalisation de Z et la variable `k` pour qu'elle contienne le numéro de chaque lancer successif. Pour cela on simule les lancers de pièce successifs. La simulation d'un tel lancer est fournie par l'instruction donnée par l'énoncé :

```
6          lancer = grand(1, 1, 'bin', 1, 0.5)
```

  La variable `lancer` prend la valeur 0 ou 1. Comme dit dans l'énoncé, Face est codée par 0 et Pile par 1.
  × On souhaite effectuer des lancers jusqu'à l'obtention du premier Pile **ou** jusqu'à la fin des n lancers. Autrement dit, on souhaite effectuer des lancers tant qu'on obtient Face **et** le nombre de lancers est inférieur à n. Comme Face est codé par 0, on obtient :

```
5      while lancer == 0 & (k+1) <= n
```

En effet, à ce stade du script, on a simulé un lancer mais pas encore mis à jour la variable `k` pour le prendre en compte. Elle contient donc toujours la valeur 0 (alors que 1 tirage a été effectué). Ce décalage entre nombre de lancers / valeur de `k` va perdurer. Ainsi, on a bien :

$$\text{nombre de lancers} = \texttt{k} + 1$$

× Pour mettre à jour `z`, deux cas se présentent :

▸ si on obtient Pile, c'est-à-dire si la variable `lancer` contient 1, alors la variable `z` prend la valeur `k+1`. En effet, on rappelle que :

- lorsque qu'on obtient un Pile pendant les n lancers, la v.a.r. Z prend la valeur du 1er Pile,
- le numéro du lancer est stocké dans la variable `k+1`.

```
        if lancer == 1 then
            z = k + 1
```

▸ si on obtient Face, alors on ne met pas à jour `z`.

× Enfin, on incrémente la variable `k` de 1 pour signifier que l'on effectue un lancer supplémentaire.

```
        k = k + 1
```

- **Fin de la fonction**
À la fin de la boucle while, deux cas se présentent donc :
× soit on a obtenu Pile au cours des n lancers, et dans ce cas, la variable `z` contient bien le rang du 1er Pile d'après les explications ci-dessus.
× soit on n'a jamais obtenu Pile au cours des n lancers, et dans ce cas, la variable `z` n'a jamais été mise à jour. Elle contient alors sa valeur initiale : 0 (ce que l'on souhaite).

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement la fonction **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.

□

On dispose de $n+1$ urnes $U_0, U_1, ..., U_n$ telles que, pour tout k de $\{0, 1, ..., n\}$, l'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.
On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes, de la façon suivante :

- Si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable Z prend la valeur k (avec $k \geqslant 1$), alors on tire une par une et avec remise, k boules dans l'urne U_k et l'on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de ces tirages.
- Si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

2. Déterminer $X(\Omega)$.

Démonstration.
Montrons : $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Pour cela, on procède par double inclusion.

($\subseteq$) Il y a entre 0 et n boules blanches dans les $(n+1)$ urnes. Donc : $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$.

($\supseteq$) Montrons maintenant que la v.a.r. X peut prendre chaque valeur entière entre 0 et n.

× Si on obtient le n-lancer de pièce (Face, …, Face), alors l'événement $[Z = 0]$ est réalisé, donc l'événement $[X = 0]$ est réalisé (d'après l'énoncé).

× Si on obtient le n-lancer de pièce (Pile, Face, …, Face), c'est-à-dire si on a obtenu Pile au 1er lancer, alors on effectue un 1-tirage dans l'urne U_1 qui contient 1 boule blanche, notée b_1, et $n-1$ boules noires, notées $n_1, \ldots, n_{n-1}$.
Si ce 1-tirage est (b_1), alors l'événement $[X = 1]$ est réalisé.

× Si on obtient le n-lancer de pièce (Face, Pile, Face, …, Face), c'est-à-dire si on a obtenu Pile au $2^{\text{ème}}$ lancer, alors on effectue un 2-tirage dans l'urne U_2 qui contient 2 boules blanches, notées b_1 et b_2, et $n-2$ boules noires, notées $n_1, \ldots, n_{n-2}$.
Si ce 2-tirage est (b_1, b_1), alors l'événement $[X = 2]$ est réalisé.
(on rappelle qu'on tire **avec remise** *dans l'urne)*

× ⋯

× Si on obtient le n-lancer de pièce (Face, …, Face, Pile), c'est-à-dire si on a obtenu Pile au $n^{\text{ème}}$ lancer, alors on effectue un n-tirage dans l'urne U_n qui contient n boules blanches, notées $b_1, \ldots, b_n$, et $n - n = 0$ boule noire.
Si ce n-tirage est $(b_1, \ldots, b_1)$, alors l'événement $[X = n]$ est réalisé.

$$\boxed{\text{Finalement : } X(\Omega) = [\![0, n]\!].}$$

Commentaire

- On donne dans cette démonstration des exemples de tirages et de lancers qui réalisent les événements $[X = i]$. Il était bien sûr possible d'en choisir d'autres.
Par exemple, pour l'événement $[X = 1]$, si on obtient le n-lancer de pièce (Face, Pile, Face, …, Face), c'est-à-dire si on a obtenu Pile au $2^{\text{ème}}$ lancer, alors on effectue un 2-tirage dans l'urne U_2.
Si ce 2-tirage est (b_2, n_3), alors l'événement $[X = 1]$ est réalisé.
- On peut un peu moins détailler la démonstration de cette question en rédigeant différemment : il est possible de tirer dans chacune des urnes U_i. De plus, les tirages dans cette urne peuvent fournir jusqu'à i boules blanches. Donc l'évément $[X = i]$ peut être réalisé.
- Comme l'énoncé demande de déterminer $X(\Omega)$ mais ne fournit pas sa valeur, on peut penser que la simple réponse « $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ » (sans justification) permet d'obtenir la majeure partie des points alloués à cette question. Évidemment, si la question s'exprime sous la forme : « Montrer que $X(\Omega) = \cdots$ », il faut détailler la réponse.
- Remarquons que pour la suite de l'exercice, notamment la détermination de la loi de X, l'inclusion « $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ suffit.

□

3. Soit $i \in X(\Omega)$.

a) Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[Z=0]}([X = i])$.

Démonstration.
Deux cas se présentent.

- Si $i = 0$, alors, comme $\mathbb{P}([Z = 0]) \neq 0$:

$$\mathbb{P}_{[Z=0]}([X = 0]) = \frac{\mathbb{P}([Z = 0] \cap [X = 0])}{\mathbb{P}([Z = 0])}$$

Or, d'après l'énoncé, si l'événement $[Z = 0]$ est réalisé, alors l'événement $[X = 0]$ est réalisé. D'où : $[Z = 0] \subset [X = 0]$. On en déduit :

$$\mathbb{P}_{[Z=0]}([X = 0]) = \frac{\mathbb{P}([Z = 0])}{\mathbb{P}([Z = 0])} = 1$$

- Si $i \in [\![1, n]\!]$, alors :

$$\mathbb{P}_{[Z=0]}([X = i]) \;=\; \frac{\mathbb{P}([Z = 0] \cap [X = i])}{\mathbb{P}([Z = 0])}$$

Or, d'après l'énoncé, si l'événement $[Z = 0]$ est réalisé, alors l'événement $[X = 0]$ est réalisé. D'où, comme $i \neq 0$: $[Z = 0] \cap [X = i] = \varnothing$. On en déduit :

$$\mathbb{P}_{[Z=0]}([X = 0]) \;=\; \frac{\mathbb{P}(\varnothing)}{\mathbb{P}([Z = 0])} \;=\; 0$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}_{[Z=0]}([X = i]) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i \in [\![1, n]\!] \end{cases}.}$$

□

b) Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[Z=n]}(\,[X = i]\,)$.

Démonstration.
Si l'événement $[Z = n]$ est réalisé, c'est qu'on a obtenu le premier Pile au $n^{\text{ème}}$ lancer. On tire alors n boules dans l'urne U_n contenant n boules blanches et $n - n = 0$ boules noires.
Deux cas se présentent alors.

- Si $i = n$, alors, comme $\mathbb{P}([Z = n]) \neq 0$:

$$\mathbb{P}_{[Z=n]}([X = n]) \;=\; \frac{\mathbb{P}([Z = n] \cap [X = n])}{\mathbb{P}([Z = n])}$$

Or, si l'événement $[Z = n]$ est réalisé, on effectue n tirages dans une urne ne contenant que des boules blanches. Ainsi, on pioche n boules blanches en n tirages. L'événement $[X = n]$ est donc réalisé. On en déduit : $[Z = n] \subset [X = n]$. Ainsi :

$$\mathbb{P}_{[Z=n]}([X = n]) \;=\; \frac{\mathbb{P}([Z = n])}{\mathbb{P}([Z = n])} \;=\; 1$$

- Si $i \in [\![0, n-1]\!]$, alors :

$$\mathbb{P}_{[Z=n]}([X = i]) \;=\; \frac{\mathbb{P}([Z = n] \cap [X = i])}{\mathbb{P}([Z = n])}$$

Or, d'après l'énoncé, si l'événement $[Z = n]$ est réalisé, alors l'événement $[X = n]$ est réalisé. D'où, comme $i \neq n$: $[Z = n] \cap [X = i] = \varnothing$. On en déduit :

$$\mathbb{P}_{[Z=n]}([X = i]) \;=\; \frac{\mathbb{P}(\varnothing)}{\mathbb{P}([Z = n])} \;=\; 0$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}_{[Z=n]}([X = i]) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n \\ 0 & \text{si } i \in [\![0, n-1]\!] \end{cases}.}$$

□

c) Pour tout k de $\{1, 2, ..., n-1\}$ déterminer, en distinguant les cas $0 \leqslant i \leqslant k$ et $k < i \leqslant n$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[Z=k]}(\,[X = i]\,)$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Si l'événement $[Z = k]$ est réalisé, c'est qu'on a obtenu le premier Pile au $k^{\text{ème}}$ lancer. On tire alors k boules dans l'urne U_k contenant k boules blanches et $n-k$ boules noires.

× Cette $2^{\text{ème}}$ partie de l'expérience consiste donc en la succession de k épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $\dfrac{k}{n}$ (probabilité d'obtenir une boule blanche dans l'urne U_k).

× La v.a.r. X correspond au nombre de succès de cette expérience.

Deux cas se présentent alors.

- si $i \in [\![0, k]\!]$, alors :

$$\mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) \;=\; \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{k-i}$$

- si $i \in [\![k+1, n]\!]$, alors :

$$\mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) \;=\; 0$$

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) = \begin{cases} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{k-i} & \text{si } i \in [\![0, k]\!] \\ 0 & \text{si } i \in [\![k+1, n]\!] \end{cases}}$$

Commentaire

- On dit que la loi de X conditionnellement à l'événement $[Z = k]$ est la loi $\mathcal{B}\left(k, \dfrac{k}{n}\right)$. On détaillera la notion de loi conditionnelle dans le chapitre sur les couples de v.a.r. discrètes.
- On aurait également pu déterminer chacune de ces probabilités conditionnelles avec des raisonnements similaires à ceux des questions ***3.a)*** et ***3.b)***.
Rappelons tout d'abord que si l'événement $[Z = k]$ est réalisé, c'est qu'on a obtenu le premier Pile au $k^{\text{ème}}$ lancer. On tire alors k boules dans l'urne U_k.
Pour bien comprendre, considérons que les boules blanches de U_k sont numérotées de 1 à k et que les boules noires sont elles numérotées de $k+1$ à n.

  × si $i \in [\![0, k]\!]$, l'événement $[X = i]$ est réalisé si et seulement si on a tiré i boules blanches lors de l'expérience. Ainsi, $[X = i]$ est réalisé par tous les k-tirages qui contiennent exactement i numéros de boules blanches et $n - i$ numéro de boules noires.
  Un tel k-tirage (c'est un k-uplet de $[\![1, n]\!]$ particulier) est entièrement déterminé par :

    - la position des i boules blanches dans le k-uplet : $\binom{k}{i}$ possibilités.
    - le numéro de chacune des i boules blanches : k^i possibilités. *(k numéros possibles pour chaque boule blanche)*
    - le numéro de chacune des $k-i$ boules noires : $(n-k)^{k-i}$ possibilités. *($n-k$ numéros possibles pour chaque boule noire)*

  Comme il y a en tout n^k tirages possibles :

$$\mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) \;=\; \binom{k}{i} \frac{k^i\,(n-k)^{k-i}}{n^k} \;=\; \binom{k}{i} \frac{k^i\,(n-k)^{k-i}}{n^i\,n^{k-i}} \;=\; \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}$$

Commentaire

× si $i \in [\![k+1, n]\!]$, alors l'événement $[X = i]$ est réalisé si et seulement si on obtient i ($> k$) boules blanches en k tirages. Cela est impossible. On en déduit :

$$\mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) \ = \ 0$$

□

4. ***a)*** Démontrer : $\mathbb{P}(\,[X=0]\,) = \dfrac{1}{2^n} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left(\dfrac{n-k}{2n}\right)^k$.

Démonstration.
D'après ***1.a)***, la famille $(\,[Z=k]\,)_{k\in[\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([X=0]) \\
= \ & \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Z=k] \cap [X=0]) \\
= \ & \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Z=k])\, \mathbb{P}_{[Z=k]}([X=0]) && \textit{(car : } \forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}([Z=k]) \neq 0\textit{)} \\
= \ & \mathbb{P}([Z=0])\, \mathbb{P}_{[Z=0]}([X=0]) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([Z=k])\, \mathbb{P}_{[Z=k]}([X=0]) + \mathbb{P}([Z=n])\, \mathbb{P}_{[Z=n]}([X=0]) \\
= \ & \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \binom{n}{0} \left(\frac{n-k}{n}\right)^k + \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times 0} && \textit{(d'après } \textbf{1.b), 3.a), 3.b)} \textit{ et } \textbf{3.c)}\textit{)} \\
= \ & \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^k
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}([X=0]) = \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n-k}{n}\right)^k.}$$

□

b) Démontrer : $\mathbb{P}(\,[X=n]\,) = \dfrac{1}{2^n}$.

Démonstration.
La famille $(\,[Z=k]\,)_{k\in[\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([X=n]) \\
= \ & \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Z=k] \cap [X=n]) \\
= \ & \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Z=k])\, \mathbb{P}_{[Z=k]}([X=n]) && \textit{(car : } \forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}([Z=k]) \neq 0\textit{)} \\
= \ & \mathbb{P}([Z=0])\, \mathbb{P}_{[Z=0]}([X=n]) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([Z=k])\, \mathbb{P}_{[Z=k]}([X=n]) + \mathbb{P}([Z=n])\, \mathbb{P}_{[Z=n]}([X=n]) \\
= \ & \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times 0} + \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \times 0} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 1 && \textit{(d'après } \textbf{1.b), 3.a), 3.b)} \textit{ et } \textbf{3.c)}\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}([X=n]) = \frac{1}{2^n}.}$$

□

c) Exprimer, pour tout i de $\{1, 2, ..., n-1\}$, $\mathbb{P}(\,[X = i])$ sous forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à réduire.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$.
La famille $(\,[Z = k]\,)_{k \in [\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([X = i]) \\
= \ & \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Z = k] \cap [X = i]) \\
= \ & \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Z = k])\, \mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) && \textit{(car : } \forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}([Z = k]) \neq 0\textit{)} \\
= \ & \mathbb{P}([Z = 0])\, \mathbb{P}_{[Z=0]}([X = i]) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([Z = k])\, \mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) + \mathbb{P}([Z = n])\, \mathbb{P}_{[Z=n]}([X = i]) \\
= \ & \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times 0} + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([Z = k])\, \mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) + \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times 0} && \textit{(d'après } \textbf{1.b)}, \textbf{3.a)}, \textbf{3.b)} \textit{ et } \textbf{3.c)}\textit{)} \\
= \ & \sum_{k=1}^{i-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) + \sum_{k=i}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) && \textit{(d'après } \textbf{1.b)}\textit{)} \\
= \ & \cancel{\sum_{k=1}^{i-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \times 0} + \sum_{k=i}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} && \textit{(d'après } \textbf{3.c)}\textit{)} \\
= \ & \sum_{k=i}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{k-i} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall i \in [\![1, n-1]\!]\ \mathbb{P}([X = i]) = \sum_{k=i}^{n-1} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n}\right)^i \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i}.}$$

□

5. Vérifier, avec les expressions trouvées à la question précédente, que $\sum\limits_{i=0}^{n} \mathbb{P}(\,[X = i]\,) = 1$.

Démonstration.
D'après les questions précédentes :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X = i) \\
= \ & \mathbb{P}(X = 0) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = i)\right) + \mathbb{P}(X = n) \\
= \ & \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k\right) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=i}^{n-1} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n}\right)^i \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
= \ & 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \sum_{1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n-1} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n}\right)^i \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i} \\
= \ & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n}\right)^i \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}([X=i]) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{0} \left(\frac{k}{2n}\right)^0 \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-0} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n}\right)^i \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i} \right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n}\right)^i \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i} \right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{2n} + \frac{n-k}{2n}\right)^k && \textit{(d'après la formule du binôme de Newton)} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}\, \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} && \textit{(car } \frac{1}{2} \neq 1\textit{)} \\
&= \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} + 1 - \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}([X=i]) = 1.}$$

□

6. a) Comment peut-on simuler le fait de tirer une boule blanche dans une urne contenant k boules blanches et $n-k$ boules noires ? (on pourra utiliser la fonction `grand`)

Démonstration.

- Tirer une boule blanche dans une urne contenant k boules blanches et $n-k$ boules noires est une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{k}{n}$ (probabilité d'obtenir une boule blanche dans une telle urne).
  Pour simuler l'épreuve de Bernoulli, on va en réalité simuler une **variable aléatoire** de loi de Bernoulli de même paramètre.
- La v.a.r. Y prenant la valeur 1 si on pioche une boule blanche et 0 si on pioche une boule noire suit alors une loi $\mathcal{B}\left(\frac{k}{n}\right)$.

On peut alors simuler un tirage dans une telle urne par `grand(1, 1, 'bin', 1, k/n)`

Commentaire

- L'énoncé fait ici la confusion entre v.a.r. et expérience. En effet, on ne simule pas un tirage mais une **variable aléatoire**. C'est pourquoi on se ramène ici à la simulation de la v.a.r. Y introduite plus haut.
- C'est d'ailleurs l'un des intérêts majeurs des variables aléatoires : elles permettent de « traduire » des résultats de l'expérience en données numériques, bien plus exploitables pour étudier l'expérience.
  × En effet, rappelons qu'une variable aléatoire X est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$. Ainsi, pour chaque **réalisation** ω de Ω, la v.a.r. X lui associe un **nombre réel** $X(\omega)$.
  Par exemple, si on obtient le n-lancer $(\text{Face}, \text{Pile}, \text{Face}, \dots, \text{Face})$, puis le 2-tirage (n_2, b_1), la v.a.r. X prend pour valeur le réel 1.
  × Bien sûr, les données obtenues grâce aux variables aléatoires définies sur Ω ne permettent pas de rendre compte de la totalité de l'expérience.
  Par exemple, savoir que la v.a.r. X prend la valeur 1 ne nous indique pas du tout quel a été le résultat de l'expérience. Est-ce :
    - le n-lancer $(\text{Face}, \text{Pile}, \text{Face}, \dots, \text{Face})$, puis le 2-tirage (b_2, n_3) ?
    - le n-lancer $(\text{Face}, \text{Pile}, \text{Face}, \dots, \text{Face})$, puis le 2-tirage (n_3, b_2) ?
    - le n-lancer $(\text{Pile}, \text{Face}, \text{Face}, \dots, \text{Face})$, puis le 1-tirage (b_1) ?
    - le n-lancer $(\text{Face}, \dots, \text{Face}, \text{Pile}, \text{Face})$, puis le $(n-1)$-tirage $(n_1, b_7, n_1, \dots, n_1)$?
    - $\cdots$

  En résumé, les variables aléatoires permettent d'extraire de l'information de l'expérience qui est traduite sous forme numérique. Et c'est cette traduction sous forme numérique qui est exploitée pour l'étude de l'expérience.

□

b) En déduire une fonction qui simule la variable aléatoire X. On devra faire appel à la fonction `exp1` définie dans l'énoncé.

Démonstration.
On propose la fonction **Scilab** suivante.

```
function X = exp(n)
    X = 0
    k = exp1(n)
    for i = 1:k
        Y = grand(1, 1, 'bin', 1, k/n)
        X = X + Y
    end
endfunction
```

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `exp`,
  × elle prend en entrée le paramètre `n`,
  × elle admet pour variable de sortie `X`.

```
function X = exp(n)
```

On initialise ensuite la variable `X` à 0. Cette variable contiendra une simulation de la v.a.r. X.

```
2    X = 0
```

La variable `k` contient une simulation de la v.a.r. Z. On obtient cette simulation en faisant appel la fonction `exp1`.

```
3    k = exp1(n)
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 4 à consistent à mettre à jour la variable `X` pour qu'elle contienne une simulation de la v.a.r. X. Or la v.a.r. X correspond au nombre de boules blanches piochées en `k` tirages dans l'urne $U_{\texttt{k}}$. Pour cela on utilise une structure itérative (boucle for) pour mettre à jour la variable `X` à chaque tirage.

  × On commence par simuler la v.a.r. Y définie en question précédente qui prend la valeur 0 si, dans l'urne $U_{\texttt{k}}$, on pioche une boule blanche et 0 si on pioche une boule noire.

```
5        Y = grand(1, 1, 'bin', 1, k/n)
```

  × On met ensuite à jour la variable `X` de la façon suivante :

```
6        X = X + Y
```

  En effet :

  ► si on pioche une boule blanche, alors le nombre de boules blanches est incrémenté de 1. On doit donc incrémenter la variable `X` de 1. Or, si on pioche une boule blanche, la variable `Y` contient justement 1. Ainsi la mise à jour de `X` est :

$$\texttt{X} = \texttt{X} + \texttt{1}$$

  ► si on pioche une boule noire, alors le nombre de boules blanches reste inchangé. On ne doit donc pas modifier la variable `X`. Or, si on pioche une boule noire, la variable `Y` contient 0. Ainsi la mise à jour de `X` est :

$$\texttt{X} = \texttt{X} + \texttt{0}$$

- **Fin de la fonction**
  À l'issue de la boucle `for`, la variable `X` contient donc le nombre de boules blanches piochées lors de `k` tirages dans $U_{\texttt{k}}$. Ainsi `X` contient bien une simulation de la v.a.r. X.

□