

## DM1 (carrés)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$ .

On considère également la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et par la relation  $u_{n+1} = f(u_n)$ , valable pour tout entier naturel  $n$ .

1. a) Dresser le tableau de variation de  $f$ , limites comprises.  
b) Vérifier que chaque terme de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est parfaitement défini et strictement positif.
2. Les scripts suivants renvoient, pour celui de gauche, la valeur 5, et celui de droite, la valeur 6. Que sait-on de  $u_5$  et  $u_6$ ? Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ?

```
1 u = 1
2 n = 0
3 while u > 0.00001
4     u = exp(-u)/u
5     n = n + 1
6 end
7 disp(n)
```

```
1 u = 1
2 n = 0
3 while u < 100000
4     u = exp(-u)/u
5     n = n + 1
6 end
7 disp(n)
```

3. a) Étudier les variations de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) = e^{-x} - x^2$$

- b) En déduire que l'équation  $f(x) = x$ , d'inconnue  $x$ , possède une seule solution, que l'on notera  $\alpha$ , sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- c) Montrer que  $\frac{1}{e} < \alpha < 1$ .

4. a) Établir les deux inégalités :  $u_2 > u_0$  et  $u_3 < u_1$ .

- b) En déduire les variations des suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ .

5. On pose :  $h(x) = \begin{cases} (f \circ f)(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

- a) Déterminer  $h(x)$  pour tout réel  $x$  strictement positif et vérifier que  $h$  est continue en 0.

- b) Résoudre l'équation  $h(x) = x$ , d'inconnue  $x$  élément de  $\mathbb{R}_+$ .

- c) En déduire la limite de la suite  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ .

- d) Montrer par l'absurde que la suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  diverge puis donner  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n}$ .

- e) Que peut-on en déduire sur la suite  $(u_n)$ ?