# DM1 (cubes)

## Partie A

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante convergente de limite $\ell$. On pose pour tout entier $n$ non nul :

$$v_n \;=\; \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$$

***1.*** ***a)*** Démontrer : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_{n+1}-v_n = \dfrac{1}{n\,(n+1)}\sum\limits_{k=1}^{n}(u_{n+1}-u_k)$.

***b)*** En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

***2.*** ***a)*** Démontrer : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n\leqslant\ell$.

***b)*** En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

***3.*** Que peut-on alors dire de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ?

***4.*** Démontrer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ : $v_{2n}\geqslant\dfrac{u_n+v_n}{2}$

***5.*** En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell$.

## Partie B

*On admet que, si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le réel $\ell$, alors on a :*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}a_j \;=\; \ell$$

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par la donnée de $u_1\in[0,1[$ et par la relation, valable pour tout entier naturel non nul $n$ : $u_{n+1}=\dfrac{u_n^2+1}{2}$.

***4.*** Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et donner sa limite.

***5.*** Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose : $v_n=1-u_n$.

***a)*** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{v_{n+1}}-\dfrac{1}{v_n}\right)$

***b)*** Étudier la convergence de la suite $(n\,v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

***c)*** En déduire : $u_n = 1-\dfrac{2}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.