DM1 (cubes)

Partie A

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante convergente de limite ℓ. On pose pour tout entier n non nul :

$$v_n \;=\; \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$$

1. a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1}-v_n = \dfrac{1}{n\,(n+1)} \sum\limits_{k=1}^{n} (u_{n+1}-u_k)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'une part, par définition de v_n et v_{n+1} :

$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \\ &= \left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} u_k + \frac{1}{n+1}\ u_{n+1}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \\ &= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} u_k + \frac{1}{n+1}\ u_{n+1} \\ &= -\frac{1}{n\,(n+1)}\sum_{k=1}^{n} u_k + \frac{1}{n+1}\ u_{n+1} \end{aligned}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n\,(n+1)}\sum_{k=1}^{n} (u_{n+1}-u_k) &= \frac{1}{n\,(n+1)}\sum_{k=1}^{n} u_{n+1} - \frac{1}{n\,(n+1)}\sum_{k=1}^{n} u_k \\ &= \cancel{n} \times \frac{1}{\cancel{n}\,(n+1)} u_{n+1} - \frac{1}{n\,(n+1)}\sum_{k=1}^{n} u_k \\ &= \frac{1}{n+1}\ u_{n+1} - \frac{1}{n\,(n+1)}\sum_{k=1}^{n} u_k \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1}-v_n = \frac{1}{n\,(n+1)} \sum_{k=1}^{n} (u_{n+1}-u_k).}$$

□

b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question précédente : $v_{n+1}-v_n = \dfrac{1}{n\,(n+1)} \sum\limits_{k=1}^{n} (u_{n+1}-u_k)$.

- Or, comme la suite (u_n) est croissante d'après l'énoncé, alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$:

$$\begin{array}{lrcl} & k & < & n+1 \\ \text{donc} & u_k & \leqslant & u_{n+1} \\ \text{d'où} & 0 & \leqslant & u_{n+1} - u_k \end{array}$$

Ainsi, en sommant les encadrements précédents pour k variant de 1 à n, on obtient :

$$\begin{array}{lrcll} & 0 & \leqslant & \sum\limits_{k=1}^{n} (u_{n+1} - u_k) & \\ \text{alors} & 0 & \leqslant & \dfrac{1}{n\,(n+1)} \sum\limits_{k=1}^{n} (u_{n+1} - u_k) & \qquad \textit{(car } n\,(n+1) > 0\textit{)} \\ \text{enfin} & 0 & \leqslant & v_{n+1} - v_n & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (v_n) \text{ est croissante.}}$$

□

2. ***a)*** Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant \ell$.

Démonstration.
Raisonnons par l'absurde. Supposons : $\texttt{NON}(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant \ell)$.
Autrement dit, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n_0} > \ell$.

- La suite (u_n) étant croissante, on a donc, par récurrence immédiate :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant u_{n_0}$$

Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $\ell \geqslant u_{n_0}$.

- En combinant avec l'inégalité de l'hypothèse, on a alors : $\ell \geqslant u_{n_0} > \ell$.

Absurde !

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant \ell.}$$

□

b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Par définition de v_n : $v_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.
- Or, d'après la question précédente : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $u_k \leqslant \ell$. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \ell}_{=\, n\,\ell}$$

Comme $n > 0$, on obtient :

$$\underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k}_{=\, v_n} \leqslant \underbrace{\frac{1}{n}\, n\,\ell}_{=\, \ell}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (v_n) \text{ est majorée par } \ell.}$$

□

3. Que peut-on alors dire de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Démonstration.
La suite (v_n) est :

- × croissante d'après ***1.b)***,
- × majorée par ℓ d'après ***2.b)***.

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ converge donc vers un réel } \ell' \text{ vérifiant : } \ell' \leqslant \ell.}$$

□

4. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_{2n} \geqslant \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} v_{2n} & = & \dfrac{1}{2n} \sum\limits_{k=1}^{2n} u_k \\ & = & \dfrac{1}{2n} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k + \sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_k \right) \\ & = & \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k + \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_k \right) \\ & = & \dfrac{1}{2} \left(v_n + \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_k \right) \end{array}$$

- Or, comme la suite (u_n) est croissante, pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$:

$$\begin{array}{rrcl} & k & > & n \\ \text{donc} & u_k & \geqslant & u_n \end{array}$$

En sommant les inégalités précédentes pour k variant de $n+1$ à $2n$, on obtient :

$$\begin{array}{rrcll} & \sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_k & \geqslant & \sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_n & \\ \text{donc} & \sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_k & \geqslant & \big(2n - (n+1) + 1\big)\, u_n & \\ \text{d'où} & \sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_k & \geqslant & n\, u_n & \\ \text{ainsi} & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_k & \geqslant & u_n & \textit{(car } n > 0\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{2n} \geqslant \dfrac{v_n + u_n}{2}.}$$

□

5. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ.

Démonstration.
- D'après la question ***3.***, la suite (v_n) converge vers ℓ' avec : $\ell' \leqslant \ell$.

$$\boxed{\ell' \leqslant \ell}$$

- D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{2n} \geqslant \frac{u_n + v_n}{2}$$

Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$:

$$\begin{array}{lrcl} & \ell' & \geqslant & \dfrac{\ell+\ell'}{2} \\ \text{donc} & 2\,\ell' & \geqslant & \ell+\ell' \\ \text{d'où} & \ell' & \geqslant & \ell \end{array}$$

$$\boxed{\ell' \geqslant \ell}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \ell' = \ell.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (v_n) \text{ converge vers } \ell.}$$

□

Partie B

On admet que, si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le réel ℓ, alors on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j \ = \ \ell$$

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par la donnée de $u_1 \in [0,1[$ et par la relation, valable pour tout entier naturel non nul n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}$.

6. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et donner sa limite.

Démonstration.
- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n \in [0,1[$.
  - ▸ **Initialisation** :
    D'après l'énoncé : $u_1 \in [0,1[$.
    D'où $\mathcal{P}(1)$.
  - ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \in [0,1[$).
    Par hypothèse de récurrence :

$$\begin{array}{lcccccl} & 0 & \leqslant & u_n & < & 1 & \\ \text{donc} & 0 & \leqslant & u_n^2 & < & 1 & \textit{(par stricte croissance de la fonction } x \mapsto x^2 \textit{ sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\ \text{d'où} & 1 & \leqslant & u_n^2+1 & < & 2 & \\ \text{ainsi} & \dfrac{1}{2} & \leqslant & \dfrac{u_n^2+1}{2} & < & 1 & \\ \text{alors} & \dfrac{1}{2} & \leqslant & u_{n+1} & < & 1 & \end{array}$$

On en déduit, par transitivité :
$$0 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} < 1$$
D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in [0,1[}$$

- Déterminons la monotonie de la suite (u_n).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2+1}{2} - u_n = \frac{u_n^2 - 2\,u_n + 1}{2} = \frac{(u_n-1)^2}{2} \geqslant 0$$
$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc croissante.}}$$
- La suite (u_n) est donc :
  × croissante,
  × majorée par 1.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ converge vers un réel } \ell \text{ vérifiant : } \ell \leqslant 1.}$$

- Déterminons alors la valeur de ℓ.
Par passage à la limite dans la relation de définition de (u_n) :
$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & \dfrac{u_n^2+1}{2} \\ {\scriptstyle n\to+\infty}\downarrow & & {\scriptstyle n\to+\infty}\downarrow \\ \ell & = & \dfrac{\ell^2+1}{2} \end{array}$$
Ainsi, ℓ est solution de l'équation : $2\,\ell = \ell^2+1$. Or :
$$2\,\ell = \ell^2+1 \quad\Leftrightarrow\quad 0 = \ell^2 - 2\,\ell + 1 \quad\Leftrightarrow\quad 0 = (\ell-1)^2 \quad\Leftrightarrow\quad \ell = 1$$
$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge donc vers 1.}}$$
□

7. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $v_n = 1 - u_n$.

a) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}\right)$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de v_{n+1} et v_n :
$$\begin{aligned} \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} &= \frac{1}{1-u_{n+1}} - \frac{1}{1-u_n} \\ &= \frac{(\cancel{1} - u_n) - (\cancel{1} - u_{n+1})}{(1-u_{n+1})\,(1-u_n)} \\ &= \frac{u_{n+1} - u_n}{(1-u_{n+1})\,(1-u_n)} \\ &= \frac{\frac{(u_n-1)^2}{2}}{(1-u_{n+1})\,(1-u_n)} \qquad \textit{(d'après la question précédente)} \end{aligned}$$

- On obtient :
$$\begin{aligned}
\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} &= -\frac{(u_n-1)^{\cancel{2}}}{2\left(1-\frac{u_n^2+1}{2}\right)\cancel{(u_n-1)}} \\
&= -\frac{u_n-1}{\cancel{2}\,\frac{2-(u_n^2-1)}{\cancel{2}}} \\
&= \frac{1-u_n}{1-u_n^2} \\
&= \frac{\cancel{1-u_n}}{\cancel{(1-u_n)}\,(1+u_n)} \\
&= \frac{1}{1+u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}
\end{aligned}$$
(car, d'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$*)*

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = \frac{1}{2}.}$$
□

b) Étudier la convergence de la suite $(n\,v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Démonstration.
On cherche à appliquer le résultat admis par l'énoncé en début de **Partie B**. Pour cela, on note (w_n) la suite définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}$$

- D'après la question précédente, la suit (w_n) converge vers le réel $\frac{1}{2}$.
D'après la propriété de l'énoncé, on en déduit :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k = \frac{1}{2}$$
- Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{v_{k+1}}-\frac{1}{v_k}\right) = \frac{1}{n\,v_{n+1}} - \frac{1}{n\,v_1} \qquad \textit{(par télescopage)}$$
On en déduit :
$$\frac{1}{n\,v_{n+1}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k + \frac{1}{n\,v_1}$$
- Or :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\,v_1} = 0$$
On en conclut : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n\,v_{n+1}} = \frac{1}{2}$.
- De plus : $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. Ainsi : $\frac{1}{n\,v_{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)\,v_{n+1}}$.
Comme deux suites équivalentes ont même limite, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)\,v_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\,v_{n+1}} = \frac{1}{2}$$
On en déduit finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n\,v_n} = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Par continuité de la fonction inverse en 2, on obtient finalement : } \lim_{n\to+\infty} n\,v_n = 2.}$$

Commentaire

- Comme ici la suite $\left(\dfrac{1}{(n+1)\,v_{n+1}}\right)$ est convergente, on en a déduit :
  × la suite $\left(\dfrac{1}{n\,v_n}\right)$ converge,
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(n+1)\,v_{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n\,v_n}$
- On a le résultat plus général suivant :

$$(u_n) \text{ convergente} \quad \Leftrightarrow \quad (u_{n+1}) \text{ convergente}$$

Si c'est le cas, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$.

- Cette propriété est bien naturelle puisque la suite (u_{n+1}) n'est autre que la suite (u_n), à un décalage d'indice près. En effet :

$$\begin{array}{rcl} (u_n) & = & (u_0 \ , \ u_1 \ , \ u_2 \ , \ \dots \ , \ \dots) \\ (u_{n+1}) & = & (u_1 \ , \ u_2 \ , \ u_3 \ , \ \dots \ , \ \dots) \end{array}$$

☐

c) En déduire : $u_n = 1 - \dfrac{2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$u_n = 1 - \frac{2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) \quad \Leftrightarrow \quad u_n - 1 + \frac{2}{n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

- Or :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{u_n - 1 + \frac{2}{n}}{\frac{1}{n}} & = & n\,(u_n - 1) + 2 \\ & = & -n\,(1 - u_n) + 2 \\ & = & -n\,v_n + 2 \\ & = & -\big(n\,v_n + 2\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -(2-2) = 0 \end{array}$$

Ainsi, on a bien : $u_n - 1 + \dfrac{2}{n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

$$\boxed{\text{Cela démontre, en vertu de l'équivalence initiale : } u_n = 1 - \frac{2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).}$$

☐