

## DM2

1. Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

a) (i) Démontrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([X > k - 1]) - \mathbb{P}([X > k])$$

*Démonstration.*

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

- On commence par remarquer :

$$\begin{aligned} [X > k - 1] &= [X \geq k] && \text{(car } X \text{ est à} \\ & && \text{valeurs entières)} \\ &= [X = k] \cup [X > k] \end{aligned}$$

### Commentaire

- Il est important de comprendre que l'égalité :

$$[X \geq k] = [X > k] \cup [X = k]$$

est vérifiée pour TOUTE v.a.r. , sans hypothèse supplémentaire. En effet, pour tout  $\omega \in \Omega$  :

$$\begin{aligned} \omega \in [X \geq k] &\Leftrightarrow X(\omega) \leq k \\ &\Leftrightarrow X(\omega) > k \quad \text{OU} \quad X(\omega) = k \\ &\Leftrightarrow \omega \in [X > k] \quad \text{OU} \quad \omega \in [X = k] \\ &\Leftrightarrow \omega \in [X > k] \cup [X = k] \end{aligned}$$

- En revanche, l'égalité :

$$[X > k - 1] = [X \geq k]$$

n'est vérifiée que pour les v.a.r. à valeurs entières. En effet, pour tout  $\omega \in \Omega$  :

$$\begin{aligned} \omega \in [X > k - 1] &\Leftrightarrow X(\omega) > k - 1 \\ &\Leftrightarrow X(\omega) \geq k \quad \text{(car } X(\omega) \text{ est un entier)} \\ &\Leftrightarrow \omega \in [X \geq k] \end{aligned}$$

Rappelons que dire que  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$  signifie :

$$X(\Omega) \subset \mathbb{N}$$

Autrement dit, toutes les valeurs prises par  $X$  sont des entiers naturels positifs. Cela ne veut pas dire pour autant que  $X$  prend toutes les valeurs entières positives. En particulier, une v.a.r.  $X$  telle que  $X(\Omega) = \llbracket 1, 10 \rrbracket$  est bien une v.a.r. à valeurs entières car  $X$  ne prend pour valeur que des entiers positifs (plus précisément tous les entiers compris entre 1 et 10).

**Commentaire**

- Pour bien comprendre le rôle joué par l'argument «  $X$  est à valeurs entières », reprenons l'idée d'une v.a.r.  $X$  telle que  $X(\Omega) = \llbracket 1, 10 \rrbracket$ . Pour une telle v.a.r. , on a par exemple :

$$[X > 8] = [X = 9] \cup [X = 10]$$

En effet :

L'événement  $[X > 8]$  est réalisé

$\Leftrightarrow X$  prend une valeur strictement supérieure à 8

$\Leftrightarrow X$  prend pour valeur 9

OU  $X$  prend pour valeur 10

$\Leftrightarrow$  L'événement  $[X = 9] \cup [X = 10]$  est réalisé

*(car les seules valeurs entières strictement supérieures à 8 et dans  $X(\Omega) = \llbracket 1, 10 \rrbracket$  sont 9 et 10)*

- Comme les événements  $[X = k]$  et  $[X > k]$  sont incompatibles, on en déduit :

$$\mathbb{P}([X > k - 1]) = \mathbb{P}([X = k]) + \mathbb{P}([X > k])$$

$$D'o\grave{u} : \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([X > k - 1]) - \mathbb{P}([X > k]).$$

□

(ii) En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X > k]) - n \mathbb{P}([X > n])$$

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X = k]) &= \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}([X = k]) \\ &= \sum_{k=1}^n k (\mathbb{P}([X > k - 1]) - \mathbb{P}([X > k])) && \text{(d'après la question précédente)} \\ &= \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}([X > k - 1]) - \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}([X > k]) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k + 1) \mathbb{P}([X > k]) - \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}([X > k]) && \text{(par décalage d'indice)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k + 1) \mathbb{P}([X > k]) - \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}([X > k]) \\ &= \mathbb{P}([X > 0]) + \sum_{k=1}^{n-1} ((k + 1) - k) \mathbb{P}([X > k]) - n \mathbb{P}([X > n]) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X > k]) - n \mathbb{P}([X > n]) \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X > k]) - n \mathbb{P}([X > n])$$

□

b) On suppose que la série  $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}([X > k])$  est convergente. Démontrer que  $X$  admet une espérance.

*Démonstration.*

- La v.a.r.  $X$  admet une espérance si et seulement si la série  $\sum_{k \geq 0} k \mathbb{P}([X = k])$  est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X = k]) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X > k]) - n \mathbb{P}([X > n]) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X > k]) && \text{(car } n \mathbb{P}([X > n]) \geq 0) \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > k]) && \text{(car la série } \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}([X > k]) \text{ est} \\ & && \text{convergente et à termes positifs))} \end{aligned}$$

- Ainsi la suite  $\left( \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X = k]) \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est :  
 × croissante, car la série  $\sum_{k \geq 0} k \mathbb{P}([X = k])$  est à termes positifs,  
 × majorée par  $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > k])$ .  
 Elle est donc convergente.

On en déduit que la v.a.r.  $X$  admet une espérance.

□

c) Réciproquement, on suppose que  $X$  admet une espérance. Démontrer alors que la suite  $(n \mathbb{P}([X > n]))_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0, puis que la série  $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}([X > k])$  est convergente et enfin :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > k])$$

*Démonstration.*

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $X$  est à valeurs entières :

$$[X > n] = [X \geq n + 1] = \bigcup_{i=n+1}^{+\infty} [X = i]$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X > n]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=n+1}^{+\infty} [X = i]\right) \\ &= \sum_{i=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i]) && \text{(car } ([X = k])_{k \in [n+1, +\infty[} \text{ est une} \\ & && \text{famille d'événements 2 à 2 incompatibles)} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$n \mathbb{P}([X > n]) = n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} n \mathbb{P}([X = k])$$

- Pour tout  $k \in \llbracket n + 1, +\infty \llbracket$ , on remarque :

$$n \leq k$$

$$\text{donc } n \times \mathbb{P}([X = k]) \leq k \times \mathbb{P}([X = k]) \quad (\text{car } \mathbb{P}([X = k]) \geq 0)$$

De plus :

- × la série  $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}([X = k])$  est convergente car la famille  $([X = k])_{k \in \mathbb{N}}$  est un système complet d'événements. Il en est de même de la série  $\sum_{k \geq 0} n \mathbb{P}([X = k])$  (car on ne modifie pas la nature d'une série en multipliant son terme général par le réel  $n$  non nul).
- × la série  $\sum_{k \geq 0} k \mathbb{P}([X = k])$  est convergente car  $X$  admet une espérance.

On en déduit, par sommation des inégalités précédentes :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} n \mathbb{P}([X = k]) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k \mathbb{P}([X = k])$$

||

$$0 \leq n \mathbb{P}([X > n])$$

- On sait par ailleurs :

$$\times \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

$$\times \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} k \mathbb{P}([X = k]) = 0.$$

En effet, comme la série  $\sum_{k \geq 0} k \mathbb{P}([X = k])$  est convergente, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X = k]) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} k \mathbb{P}([X = k])$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{+\infty} k \mathbb{P}([X = k]) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbb{P}([X = k]) - \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X = k]) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbb{P}([X = k]) - \sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbb{P}([X = k]) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, par théorème d'encadrement :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \mathbb{P}([X > n]) = 0.$

### Commentaire

Cette question fait intervenir un résultat classique sur les séries. Étant donnée une série  $\sum u_n$  convergente, de somme notée  $S$  et dont la suite des sommes partielles est notée  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k}_S = \underbrace{\sum_{k=0}^n u_k}_{S_n} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k}_{R_n}$$

La quantité  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$  est appelé reste d'ordre  $n$  de la série  $\sum u_n$ .

La suite  $(R_n)$  ainsi construite est convergente de limite nulle. En effet :

$$R_n = S - S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S - S = 0$$

- D'après la question **1.a)(ii)** :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X > k]) = \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X = k]) + n \mathbb{P}([X > n])$$

Ainsi, la suite  $\left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X > k])\right)$  admet une limite finie car elle apparaît comme la somme de deux suites admettant une limite finie car :

- × la suite des sommes partielles  $\left(\sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X = k])\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\mathbb{E}(X)$ .
- × la suite  $(n \mathbb{P}([X > n]))$  converge vers 0 d'après le point précédent.

La série  $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}([X > k])$  est donc convergente.

De plus :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > k]) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X > k]) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X = k]) + n \mathbb{P}([X > n]) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X = k]) + \lim_{n \rightarrow +\infty} n \mathbb{P}([X > n]) \\ &= \mathbb{E}(X) + 0 \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > k])$$

□

**2. Une application** : soit  $n$  et  $N$  deux entiers naturels non nuls. On dispose d'une urne qui contient  $N$  boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à  $N$ . On effectue dans cette urne,  $n$  tirages successifs avec remise d'une boule et on note  $X$  le plus grand nombre obtenu.

**a)** Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $E_i$  la variable aléatoire qui donne le résultat du  $i^{\text{ème}}$  tirage. Ces variables aléatoires sont indépendantes car les tirages le sont.

**(i)** Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Donner, en justifiant, la loi de  $E_i$ .

*Démonstration.*

Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

- L'expérience consiste en un choix équiprobable parmi  $N$  issues numérotées de 1 à  $N$ .
- La v.a.r.  $E_i$  correspond au numéro obtenu lors de cette expérience (au  $i^{\text{ème}}$  tirage)

On en déduit, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :  $E_i \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)$ .

□

**(ii)** Exprimer la v.a.r.  $X$  en fonction des v.a.r.  $E_1, \dots, E_n$ .

*Démonstration.*

La v.a.r.  $X$  correspond au plus grand nombre obtenu au cours des  $n$  tirages. Or, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la v.a.r.  $E_i$  correspond au nombre obtenu au cours du  $i^{\text{ème}}$  tirage.

On obtient :  $X = \max(E_1, \dots, E_n)$ .

□

(iii) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Démontrer :

$$\mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([X \leq k]) - \mathbb{P}([X \leq k - 1])$$

*Démonstration.*

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . D'après la question 1.a)(i) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = k]) &= \mathbb{P}([X > k - 1]) - \mathbb{P}([X > k]) \\ &= \left(1 - \mathbb{P}([X \leq k - 1])\right) - \left(1 - \mathbb{P}([X \leq k])\right) \\ &= \mathbb{P}([X \leq k]) - \mathbb{P}([X \leq k - 1]) \end{aligned}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([X \leq k]) - \mathbb{P}([X \leq k - 1])$$

### Commentaire

Plutôt que d'utiliser la question 1.a)(ii), on pouvait effectuer une démonstration similaire (un peu moins rapide), en commençant par remarquer :

$$\begin{aligned} [X \leq k] &= [X = k] \cup [X < k] \\ &= [X = k] \cup [X \leq k - 1] \quad (\text{car } X \text{ est à} \\ &\quad \text{valeurs entières)} \end{aligned}$$

Comme les événements  $[X = k]$  et  $[X \leq k - 1]$  sont incompatibles, on en déduit :

$$\mathbb{P}([X \leq k]) = \mathbb{P}([X = k]) + \mathbb{P}([X \leq k - 1])$$

D'où l'égalité demandée. □

(iv) En déduire la loi de  $X$ .

*Démonstration.*

- Tout d'abord :  $X(\Omega) \subset \llbracket 1, N \rrbracket$  car, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $E_i(\Omega) = \llbracket 1, N \rrbracket$ .

$$X(\Omega) \subset \llbracket 1, N \rrbracket$$

- Soit  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . Commençons par déterminer  $\mathbb{P}([X \leq k])$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X \leq k]) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [E_i \leq k]\right) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}([E_i \leq k]) \quad (\text{car les v.a.r. } E_1, \dots, E_n \\ &\quad \text{sont indépendantes)} \\ &= (\mathbb{P}([E_1 \leq k]))^n \quad (\text{car les v.a.r. } E_1, \dots, E_n \\ &\quad \text{ont même loi)} \end{aligned}$$

- Or, comme  $E_1$  est à valeurs dans  $\llbracket 1, N \rrbracket$  :

$$[E_1 \leq k] = \bigcup_{j=1}^k [E_1 = j]$$

Comme les événements  $[E_1 = 1], \dots, [E_1 = k]$  sont 2 à 2 incompatibles, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([E_1 \leq k]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^k [E_1 = j]\right) \\ &= \sum_{j=1}^k \mathbb{P}([E_1 = j]) \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{1}{N} \quad (\text{car } E_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)) \\ &= \frac{k}{N} \end{aligned}$$

On obtient alors :  $\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, \mathbb{P}([X \leq k]) = \left(\frac{k}{N}\right)^n$ .

- Soit  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([X \leq k]) - \mathbb{P}([X \leq k - 1])$$

En effectuant exactement le même raisonnement que dans le point précédent, on obtient :

$$\mathbb{P}([X \leq k - 1]) = \left(\frac{k - 1}{N}\right)^n$$

On en déduit :  $\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, \mathbb{P}([X = k]) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k - 1}{N}\right)^n$ .

□

- b)** À l'aide des questions précédentes, déterminer l'espérance de  $X$  en fonction de  $n$  et  $N$ .

*Démonstration.*

- La v.a.r.  $X$  est finie. Elle admet donc une espérance.
- D'après la question **1.c)**, la série  $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}([X > k])$  est alors convergente et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > k]) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X > k]) \quad (\text{car } X(\Omega) \subset \llbracket 1, N \rrbracket) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} (1 - \mathbb{P}([X \leq k])) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \left(\frac{k}{N}\right)^n\right) \quad (\text{d'après la question précédente}) \\ &= N - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n \end{aligned}$$

$\mathbb{E}(X) = N - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n$

**Commentaire**

On pouvait également calculer  $\mathbb{E}(X)$  à l'aide de la définition de l'espérance, ce qui fournissait une autre expression :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^N k \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=1}^N k \left( \left( \frac{k}{N} \right)^n - \left( \frac{k-1}{N} \right)^n \right)$$

Les deux expressions étaient a priori tout autant valides au vu de l'énoncé de cette question.

□