
DM2 (optionnel)

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0.

Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point O .

Le mobile se déplace selon la règle suivante : à l'instant n ($n \in \mathbb{N}^*$), il se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisse $0, 1, \dots, n$.

Pour tout entier naturel n , on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n (on a donc $X_0 = 0$).

On admet que, pour tout entier naturel n , X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer. On admet aussi que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. a) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, la loi de X_n .

b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, X_n possède une espérance et une variance, puis déterminer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

2. On note Y le rang du premier retour à l'origine du mobile et on admet que Y est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer l'événement $[Y = n]$ à l'aide des variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n .

b) En déduire que la loi de Y est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([Y = n]) = \frac{1}{n(n+1)}$.

c) Vérifier par le calcul que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = n]) = 1$.

d) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ?

3. a) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.

b) En déduire : $\forall j \geq 2, \ln(j) \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leq \ln(j) + 1 - \frac{1}{j}$.

c) Conclure alors : $\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \underset{j \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(j)$.

4. On note Z le rang du deuxième retour à l'origine du mobile et on admet que Z est une variable aléatoire, définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a) Déterminer pour tout $i \geq j$, la probabilité $\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z = j])$.

b) Établir :

$$\forall i \leq j-1, \mathbb{P}_{[Y=i]}([Z = j]) = \frac{i+1}{j(j+1)}$$

c) Écrire, pour tout entier naturel j supérieur ou égal à 2, la probabilité $\mathbb{P}([Z = j])$ comme une somme finie.

d) La variable aléatoire Z possède-t-elle une espérance ?

5. Informatique

On rappelle qu'en **Scilab**, l'instruction `grand(1, 1, 'uin ', a, b)` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme à valeurs dans $[[a, b]]$.

- a) Écrire des commandes **Scilab** calculant et affichant la valeur de l'abscisse du mobile après son $n^{\text{ème}}$ déplacement lorsque la valeur de n est entrée au clavier par l'utilisateur.
- b) Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il permette d'afficher dans cet ordre les valeurs prises par les variables aléatoires Y et Z .

```
1  n = 0
2  a = 0
3  while a < 2
4      n = n + 1
5      if grand(1, 1, 'uin', 0, n) == 0 then
6          a = a + 1
7          if a == 1 then
8              y = n
9          end
10         end
11     end
12     disp(..., 'y =')
13     disp(..., 'z =')
```