DM2 (optionnel)

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0.
Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point O.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : à l'instant n ($n \in \mathbb{N}^*$), il se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisse 0, 1, ..., n.
Pour tout entier naturel n, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n (on a donc $X_0 = 0$).
On admet que, pour tout entier naturel n, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer. On admet aussi que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. ***a)*** Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, la loi de X_n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- L'expérience consiste en un choix effectué de manière équiprobable parmi $n+1$ issues numérotées de 0 à n.
- La v.a.r. X correspond au numéro obtenu lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket).}$$

□

b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, X_n possède une espérance et une variance, puis déterminer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

Démonstration.
La v.a.r. X_n suit une loi usuelle. On en déduit qu'elle admet une espérance et une variance.

$$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(X_n) = \frac{n}{2} \text{ et } \mathbb{V}(X_n) = \frac{((n+1)-1)((n+1)+1)}{12} = \frac{n(n+2)}{12}.}$$

□

2. On note Y le rang du premier retour à l'origine du mobile et on admet que Y est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

a) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer l'événement $[Y = n]$ à l'aide des variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
L'événement $[Y = n]$ est réalisé si et seulement si le premier retour à l'origine a lieu à l'instant n.
Autrement dit, si le mobile :

× ne se trouve pas au point d'abscisse 0 à l'instant 1,

× ne se trouve pas au point d'abscisse 0 à l'instant 2,

× ...

× ne se trouve pas au point d'abscisse 0 à l'instant $n-1$,

× se trouve au point d'abscisse 0 à l'instant n.

Ainsi : $[Y = n] = \overline{[X_1 = 0]} \cap \overline{[X_2 = 0]} \cap \ldots \cap \overline{[X_{n-1} = 0]} \cap [X_n = 0]$.

$$\boxed{[Y = n] = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{[X_i = 0]} \right) \cap [X_n = 0]}$$

□

b) En déduire que la loi de Y est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Y=n]) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=n]) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{[X_i=0]}\right) \cap [X_n=0]\right) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}\left(\overline{[X_i=0]}\right)\right) \times \mathbb{P}(\,[X_n=0]\,) && \textit{(car } (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ est une suite de v.a.r. indépendantes)} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n-1} \left(1-\mathbb{P}(\,[X_i=0]\,)\right)\right) \times \mathbb{P}(\,[X_n=0]\,) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n-1} \left(1-\frac{1}{i+1}\right)\right) \times \frac{1}{n+1} && \textit{(car pour tout } i \in \mathbb{N}^*, X_i \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0,i \rrbracket)\textit{)} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{i}{i+1}\right) \times \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{3} \times \ldots \times \frac{n-2}{\cancel{n-1}} \times \frac{\cancel{n-1}}{n} \times \frac{1}{n+1} && \textit{(par télescopage)} \\
&= \frac{1}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Y=n]) = \frac{1}{n(n+1)}.}$$

Commentaire

On est confronté dans cette question à un produit télescopique.
Présentons ici les différentes étapes permettant ce type de simplification :

$$\prod_{i=1}^{n-1} \frac{i}{i+1} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1} i}{\prod\limits_{i=1}^{n-1} (i+1)} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1} i}{\prod\limits_{i=2}^{n} i} = \frac{1 \times \cancel{\prod\limits_{i=2}^{n-1} i}}{\cancel{\prod\limits_{i=2}^{n-1} i} \times n} = \frac{1}{n}$$

□

c) Vérifier par le calcul que l'on a : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=n]) = 1$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

- Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En sommant les égalités précédentes :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}([Y=n]) &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{N+1} \qquad \textit{(par sommation télescopique)} \\ &= 1 - \frac{1}{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}([Y=n]) \text{ est convergente et que sa somme vaut } 1.}$$

□

d) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ?

Démonstration.

- La v.a.r. Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 1} n\,\mathbb{P}([Y=n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- On a alors :
  × $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n\,\mathbb{P}([Y=n]) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{n} \geqslant 0$
  × $n\,\mathbb{P}([Y=n]) = \cancel{n} \dfrac{1}{\cancel{n}\,(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$
  × La série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est divergente car c'est une série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not> 1$).

  Ainsi, d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} n\,\mathbb{P}([Y=n])$ est divergente.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Y \text{ n'admet pas d'espérance.}}$$

□

3. a) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $t \in [k, k+1]$.

$$\begin{array}{lccccc} \text{Comme} & k & \leqslant & t & \leqslant & k+1 \\ \text{alors} & \dfrac{1}{k} & \geqslant & \dfrac{1}{t} & \geqslant & \dfrac{1}{k+1} \end{array} \qquad \textit{(car la fonction inverse est décroissante sur }]0,+\infty[\textit{)}$$

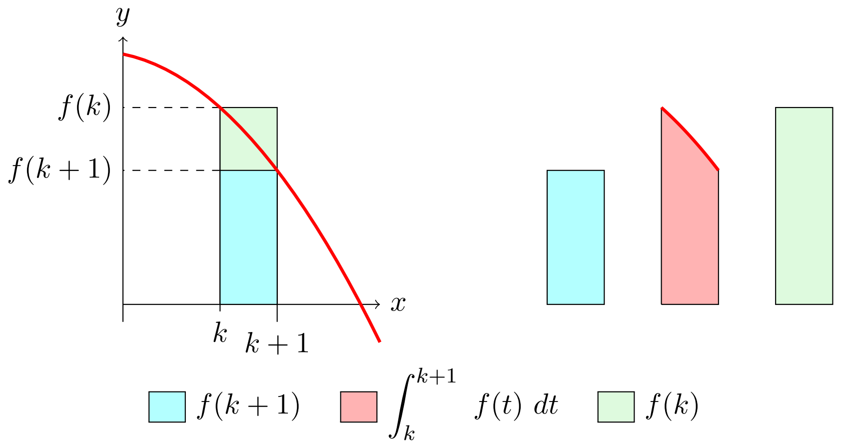
- La fonction inverse est continue sur le segment $[k, k+1]$.
  Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k \leqslant k+1$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dt & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dt \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \big((k+1)-k\big)\,\dfrac{1}{k} & & \big[\ \ln(t)\ \big]_k^{k+1} & & \big((k+1)-k\big)\,\dfrac{1}{k+1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.}$$

Culture : représentation graphique associée à une comparaison séries / intégrales

Cette démonstration illustre le procédé classique de comparaison séries / intégrales.
Rappelons le schéma associé pour une fonction f continue et décroissante sur le segment $[k, k+1]$.



Commentaire

- On pouvait également raisonner à l'aide d'une inégalité de convexité classique.
  La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $]-1, +\infty[$. Sa courbe représentative est donc située sous ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 0, droite d'équation :
  $$y \ = \ f(0) + f'(0)\,(x-0) \ = \ x$$
  On en déduit : $\forall x \in \,]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

  1) Intéressons-nous tout alors à l'inégalité de gauche.
  $$\begin{aligned} \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{1}{k+1} \leqslant -\ln\left(\frac{k}{k+1}\right) \\ & \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{k+1} \geqslant \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{k+1} \geqslant \ln\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \end{aligned}$$
  Or, comme $k+1 \geqslant 2$: $-\dfrac{1}{k+1} \in \,]-1, +\infty[$.
  On obtient le résultat souhaité en appliquant l'inégalité de convexité en $x = -\dfrac{1}{k+1}$.

  2) Intéressons-nous maintenant à l'inégalité de droite.
  $$\begin{aligned} \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k} \quad & \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k} \\ & \Leftrightarrow \quad \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k} \end{aligned}$$
  Or, comme $k \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{k} \in \,]0, +\infty[\, \subset \,]-1, +\infty[$.
  On obtient le résultat souhaité en appliquant l'inégalité de convexité en $x = \dfrac{1}{k}$.

Commentaire

- Il était aussi possible de démontrer ce résultat à l'aide de l'inégalité des accroissements finis. Exposons ce procédé.
- On note $g : t \mapsto \ln(t)$. On a :
  - × g est dérivable sur $[k, k+1]$,
  - × $\forall t \in [k, k+1],\ \dfrac{1}{k+1} \leqslant g'(t) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

  On en déduit, par inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in [k, k+1]^2,\ \frac{1}{k+1}(y - x) \leqslant g(y) - g(x) \leqslant \frac{1}{k}$$

  En appliquant cette inégalité à $y = k+1$ et $x = k$, on obtient :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

□

b) En déduire : $\forall j \geqslant 2,\ \ln(j) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{j-1} \dfrac{1}{k} \leqslant \ln(j) + 1 - \dfrac{1}{j}$.

Démonstration.
Soit $j \geqslant 2$.

- On somme l'inégalité précédente pour k variant de 1 à $j-1$. On obtient :

$$\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k+1} \quad \leqslant \quad \sum_{k=1}^{j-1} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) \quad \leqslant \quad \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{j-1} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) = \ln\big((j-1)+1\big) - \cancel{\ln(1)}$$

$$\boxed{\text{L'inégalité de droite fournit : } \ln(j) \leqslant \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}.}$$

- Par ailleurs :

$$\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{j} \frac{1}{k} = -1 + \left(\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{j}$$

  L'inégalité de gauche fournit alors :

$$-1 + \left(\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{j} \leqslant \ln(j)$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leqslant \ln(j) + 1 - \frac{1}{j}.}$$

□

c) Conclure alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \underset{j\to+\infty}{\sim} \ln(j)$.

Démonstration.
Soit $j \geqslant 2$.

- En divisant par $\ln(j) > 0$ de part et d'autre de l'inégalité de la question précédente, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{\ln(j)}{\ln(j)} & \leqslant & \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}}{\ln(j)} & \leqslant & \dfrac{\ln(j)+1-\frac{1}{j}}{\ln(j)} \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 1 & & & & 1+\dfrac{1}{\ln(j)} - \dfrac{1}{j\ \ln(j)} \end{array}$$

- Or :
  $\times$ $1 \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
  $\times$ $1+\dfrac{1}{\ln(j)} - \dfrac{1}{j\ \ln(j)} \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

  Ainsi, par théorème d'encadrement : $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}}{\ln(j)} \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \underset{j\to+\infty}{\sim} \ln(j).}$$

□

4. On note Z le rang du deuxième retour à l'origine du mobile et on admet que Z est une variable aléatoire, définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

a) Déterminer pour tout $i \geqslant j$, la probabilité $\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z=j])$.

Démonstration.
Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $i \geqslant j$.

- Remarquons tout d'abord :
$$[Y=i] \cap [Z=j] = \varnothing$$
  En effet, l'événement $[Y=i] \cap [Z=j]$ est réalisé si et seulement si le rang du premier retour à l'origine est i et le rang du deuxième retour est j.
  Cela n'est pas possible car on a supposé $i \geqslant j$.
- On en déduit :
$$\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z=j]) = \frac{\mathbb{P}([Y=i]\cap[Z=j])}{\mathbb{P}([Y=i])} = \frac{\mathbb{P}(\varnothing)}{\mathbb{P}([Y=i])} = \frac{0}{\mathbb{P}([Y=i])} = 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } i \geqslant j : \mathbb{P}_{[Y=i]}([Z=j]) = 0.}$$

Commentaire

- On pouvait raisonner de manière plus directe en adoptant la rédaction suivante.
  Si l'événement $[Y = i]$ est réalisé, c'est que le premier retour à l'origine a eu lieu à l'instant i. Dans ce cas, le deuxième retour à l'origine ne peut avoir eu lieu à un instant $j \leqslant i$.
  On en déduit : $\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z = j]) = 0$.
- Revenons sur cette rédaction afin de comprendre ce que signifie raisonner conditionnellement à la réalisation d'un événement.
  - L'univers Ω (ensemble des résultats possibles de l'expérience) est constitué initialement de tous les ∞-déplacements du mobile. Faire l'hypothèse que l'événement $[Y = i]$ est réalisé revient à considérer un nouvel univers Ω' qui ne serait constitué que des ∞-déplacements qui réalisent l'événement $[Y = i]$.
  - Déterminer la probabilité de l'événement $[Z = j]$ conditionnellement à la réalisation de l'événement $[Y = i]$, c'est alors déterminer la probabilité de l'événement $[Z = j]$ sur l'espace probabilisé $(\Omega', \mathscr{A}', \mathbb{P})$.
- Raisonner conditionnellement à la réalisation d'un événement, ce n'est **en aucun cas**, considérer un événement conditionné par un autre. La raison en est simple : un tel objet **n'existe pas** en mathématiques !

L'écriture ${}_{[Y=i]}\,[Z = j]$ est donc une **horreur** qu'il faut proscrire de toute rédaction.

□

b) Établir :

$$\forall i \leqslant j-1, \quad \mathbb{P}_{[Y=i]}([Z = j]) = \frac{i+1}{j(j+1)}$$

Démonstration.
Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $i \leqslant j - 1$.

- L'événement $[Y = i] \cap [Z = j]$ est réalisé si et seulement si le rang du premier retour à l'origine est i et le rang du deuxième retour est $j \geqslant i + 1$.
  Autrement dit, si le mobile :
  × ne se trouve pas au point d'abscisse 0 à l'instant 1,
  × ...
  × ne se trouve pas au point d'abscisse 0 à l'instant $i - 1$,
  × se trouve au point d'abscisse 0 à l'instant i.
  × ne se trouve pas au point d'abscisse 0 à l'instant $i + 1$,
  × ...
  × ne se trouve pas au point d'abscisse 0 à l'instant $j - 1$,
  × se trouve au point d'abscisse 0 à l'instant j.

$$\boxed{[Y = i] \cap [Z = j] = \left(\bigcap_{k=1}^{i-1} \overline{[X_k = 0]}\right) \cap [X_i = 0] \cap \left(\bigcap_{k=i+1}^{j-1} \overline{[X_k = 0]}\right) \cap [X_j = 0]}$$

Commentaire

Il est à noter que la décomposition de l'événement $[Y = i] \cap [Z = j]$ démontre la bonne compréhension et permet donc, à elle seule, d'obtenir la totalité des points alloués sur cette étape.

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}([Y=i]\cap[Z=j]) \\
= \;& \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{i-1}\overline{[X_k=0]}\right)\cap[X_i=0]\cap\left(\bigcap_{k=i+1}^{j-1}\overline{[X_k=0]}\right)\cap[X_j=0]\right) \\
= \;& \left(\prod_{k=1}^{i-1}\mathbb{P}\left(\overline{[X_k=0]}\right)\right)\times\mathbb{P}(\,[X_i=0]\,)\times\left(\prod_{k=i+1}^{j-1}\mathbb{P}\left(\overline{[X_k=0]}\right)\right)\times\mathbb{P}(\,[X_j=0]\,) && \textit{(car } (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ est une suite de v.a.r. indépendantes)} \\
= \;& \mathbb{P}([Y=i])\times\left(\prod_{k=i+1}^{j-1}\left(1-\mathbb{P}(\,[X_k=0]\,)\right)\right)\times\mathbb{P}(\,[X_j=0]\,) && \textit{(d'après la question \textbf{2.b)})} \\
= \;& \mathbb{P}([Y=i])\times\left(\prod_{k=i+1}^{j-1}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\right)\times\frac{1}{j+1} && \textit{(pour tout } k\in\mathbb{N}^*, X_k\hookrightarrow\mathcal{U}([\![0,k]\!])\textit{)} \\
= \;& \mathbb{P}([Y=i])\times\left(\prod_{k=i+1}^{j-1}\frac{k}{k+1}\right)\times\frac{1}{j+1} \\
= \;& \mathbb{P}([Y=i])\times\frac{i+1}{\cancel{i+2}}\times\frac{\cancel{i+2}}{i+3}\times\dots\times\frac{j-2}{\cancel{j-1}}\times\frac{\cancel{j-1}}{j}\times\frac{1}{j+1} && \textit{(par télescopage)} \\
= \;& \mathbb{P}([Y=i])\times\frac{i+1}{j(j+1)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Y=i]\cap[Z=j])=\mathbb{P}([Y=i])\times\frac{i+1}{j(j+1)}}$$

- On en déduit :

$$\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z=j])=\frac{\mathbb{P}([Y=i]\cap[Z=j])}{\mathbb{P}([Y=i])}=\frac{\cancel{\mathbb{P}([Y=i])}\times\frac{i+1}{j(j+1)}}{\cancel{\mathbb{P}([Y=i])}}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall i\leqslant j-1,\;\; \mathbb{P}_{[Y=i]}([Z=j])=\frac{i+1}{j(j+1)}.}$$

□

c) Écrire, pour tout entier naturel j supérieur ou égal à 2, la probabilité $\mathbb{P}([Z=j])$ comme une somme finie.

Démonstration.
La famille $([Y=i])_{i\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
Soit $j \geqslant 2$. Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z=j]) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=i]\cap[Z=j]) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=i]) \times \mathbb{P}_{[Y=i]}([Z=j]) \\
&= \sum_{\substack{i=1 \\ i\leqslant j-1}}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=i]) \times \mathbb{P}_{[Y=i]}([Z=j]) + \sum_{\substack{i=1 \\ i\geqslant j}}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=i]) \times \cancel{\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z=j])} \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i(\cancel{i+1})}\ \frac{\cancel{i+1}}{j(j+1)} \qquad \textit{(d'après les questions 2.b) et 4.b))} \\
&= \frac{1}{j(j+1)} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } j\geqslant 2 : \mathbb{P}([Z=j]) = \frac{1}{j(j+1)} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i}.}$$

□

d) La variable aléatoire Z possède-t-elle une espérance ?

Démonstration.

- Notons tout d'abord : $Z(\Omega) = [\![2,+\infty[\![$.
  En effet, le mobile peut revenir pour la première fois à l'origine au rang 2 ou aux rangs suivants.
- La v.a.r. Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{j\geqslant 2} j\,\mathbb{P}([Z=j])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- On a alors :
  × $\forall j\geqslant 2,\ j\,\mathbb{P}([Z=j]) \geqslant 0$ et $\dfrac{\ln(j)}{j} \geqslant 0$
  × $j\,\mathbb{P}([Z=j]) = j\,\dfrac{1}{j(j+1)} \sum\limits_{i=1}^{j-1} \dfrac{1}{i} \underset{j\to+\infty}{\sim} j\,\dfrac{1}{j^2}\,\ln(j) = \dfrac{\ln(j)}{j}$
  × La série $\sum\limits_{j\geqslant 2} \dfrac{\ln(j)}{j}$ est divergente (on le démontre en dessous).

  Ainsi, d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{j\geqslant 2} j\,\mathbb{P}([Z=j])$ est divergente.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Z \text{ n'admet pas d'espérance.}}$$

- Il reste à démontrer que la série $\sum\limits_{j \geqslant 2} \dfrac{\ln(j)}{j}$ est divergente.

  × $\forall j \geqslant 2,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{j} \leqslant \dfrac{\ln(j)}{j}$

  × La série $\sum\limits_{j \geqslant 2} \dfrac{1}{j}$ est divergente car c'est une série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not> 1$).

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs,}\\ \text{la série } \sum\limits_{j \geqslant 2} \dfrac{\ln(j)}{j} \text{ est divergente.}\end{array}}$$

□

5. Informatique.
On rappelle qu'en **Scilab**, l'instruction `grand(1, 1, 'uin', a, b)` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme à valeurs dans $[\![a, b]\!]$.

a) Écrire des commandes **Scilab** calculant et affichant la valeur de l'abscisse du mobile après son $n^{\text{ème}}$ déplacement lorsque la valeur de n est entrée au clavier par l'utilisateur.

Démonstration.
Le $n^{\text{ème}}$ déplacement du mobile est régi par un choix uniforme d'un élément de l'ensemble $[\![0, n]\!]$. On en déduit le programme suivant.

```
n = input('Prière d''entrer une valeur entière')
x = grand(1, 1, 'uin', 0, n)
```

□

b) Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il permette d'afficher dans cet ordre les valeurs prises par les variables aléatoires Y et Z.

```
n = 0
a = 0
while a < 2
  n = n + 1
  if grand(1, 1, 'uin', 0, n) == 0 then
    a = a + 1
    if a == 1 then
      y = n
    end
  end
end
disp(..., 'y =')
disp(..., 'z =')
```

Démonstration.
Commençons par commenter les différentes lignes de ce programme.

- Initialement, la variable `n` qui stocke l'instant de déplacement du mobile est affectée à 0.

```
n = 0
```

  De même, la variable `a` qui stocke le nombre de retours en l'origine est initialisée à 0.

```
a = 0
```

- On entra alors dans une structure itérative (boucle `while`) permettant d'effectuer des instructions tant que le mobile n'est pas revenu deux fois en l'origine.

```
while a < 2
```

  × À chaque tour de boucle, on met à jour l'instant de déplacement.

```
    n = n + 1
```

  × S'ensuit alors un test permettant de vérifier si le `n`$^{\text{ème}}$ déplacement est un retour à l'origine.

```
    if grand(1, 1, 'uin', 0, n) == 0 then
```

  Si c'est le cas, on commence par mettre à jour la variable comptant le nombre de retours à l'origine.

```
        a = a + 1
```

  Dans le cas où c'est le premier retour à l'origine (ce qu'on teste à l'aide d'une structure conditionnelle), on stocke dans la variable `y` le rang auquel s'est effectué ce premier déplacement.

```
        if a == 1 then
          y = n
        end
```

  Dans le cas contraire, on est confronté au deuxième retour à l'origine. Cela provoque la sortie de la boucle.

- En fin de boucle, la variable `y` contient le rang du premier retour à l'origine.
  Le rang du deuxième retour à l'origine est obtenu par l'instant de déplacement `n` qui a permis d'obtenir ce deuxième retour.

```
disp(y, 'y =')
disp(n, 'z =')
```

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu dans cette question, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question.
- On doit s'interroger sur la terminaison de la boucle `while`. A priori, il n'est pas clair que cette boucle se termine : on peut théoriquement obtenir une suite infinie de déplacements ne contenant aucun ou un seul retour à l'origine. Cependant, on peut démontrer que l'événement « le mobile revient plus de deux fois à l'origine » se produit avec probabilité 1.
  Ainsi, la boucle termine presque sûrement.
- On peut même démontrer que l'événement A : « le mobile revient une infinité de fois en l'origine » se produit presque sûrement. Pour cela, on l'écrit sous la forme :

$$A = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{j=i}^{+\infty} [X_j = 0]$$

  et on détermine $\mathbb{P}(A)$ à l'aide du théorème de la limite monotone (en remarquant notamment que la suite d'évenements $(C_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $C_i = \bigcup_{j=i}^{+\infty} [X_j = 0]$ est décroissante).

□