DM Toussaint

Les théorèmes utilisés seront cités avec précision en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt$.

1. **Étude de la convergence de la série de terme général u_n**

a) Vérifier que la suite $(|u_n|)$ est décroissante.

b) Montrer que la suite $(|u_n|)$ tend vers 0.

c) Prouver que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

2. **Calcul de la somme de cette série**

a) Soit t un réel. Linéariser $\cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

b) En déduire $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(t)}\, dt$.

c) **Intégration terme à terme ?**

(i) Déterminer une relation de récurrence entre $|u_{n+2}|$ et $|u_n|$.

(ii) Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.

(iii) Peut-on utiliser un théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions pour calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$?

On justifiera rigoureusement la réponse.

d) On pose, pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n(t) = (-1)^n \cos^n(t) \qquad \text{et} \qquad V_n(t) = \sum_{k=0}^{n} v_k(t)$$

En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculer la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.