DM Toussaint

Les théorèmes utilisés seront cités avec précision en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(t)\big)^n \, dt$.

1. **Étude de la convergence de la série de terme général u_n**

a) Vérifier que la suite $\big(|u_n|\big)$ est décroissante.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \big(\cos(t)\big)^n$ est continue sur le `SEGMENT` $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(t)\big)^n \, dt$ est bien définie.
- Soit $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{lcccll} & 0 & \leqslant & \cos(t) & \leqslant & 1 \\ \text{donc} & 0 & \leqslant & \big(\cos(t)\big)^n & \leqslant & 1 \quad \textit{(par croissance de la fonction élévation à la puissance } n \textit{ sur } [0, +\infty[\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall t \in [0, \tfrac{\pi}{2}], \ 0 \leqslant \big(\cos(t)\big)^n \leqslant 1}$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant \frac{\pi}{2}$) :

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(t)\big)^n \, dt \leqslant 1$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} |\, u_n \,| &= \left| (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(t)\big)^n \, dt \right| \\ &= |\,(-1)^n\,| \times \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(t)\big)^n \, dt \right| \quad \textit{(d'après le point précédent)} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(t)\big)^n \, dt \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ |\, u_n \,| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(t)\big)^n \, dt}$$

- Par ailleurs :

$$\begin{array}{lccl} & \cos(t) & \leqslant & 1 \\ \text{donc} & \big(\cos(t)\big)^{n+1} & \leqslant & \big(\cos(t)\big)^n \quad \textit{(car } \big(\cos(t)\big)^n \geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall t \in [0, \tfrac{\pi}{2}], \ \big(\cos(t)\big)^{n+1} \leqslant \big(\cos(t)\big)^n}$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant \frac{\pi}{2}$) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(t)\big)^{n+1}\, dt \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(t)\big)^{n}\, dt$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1}| \leqslant |u_n|. \text{ La suite } \big(|u_n|\big) \text{ est donc décroissante.}}$$

□

b) Montrer que la suite $\big(|u_n|\big)$ tend vers 0.

Démonstration.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $h_n : t \mapsto \big(\cos(t)\big)^n$.
- On souhaite appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions (h_n).

(i) Existence d'une limite finie - étude « en n »

- ▶ Soit $t_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Deux cas se présentent.
  - × Si $t_0 = 0$:

$$h_n(t_0) = \big(\cos(0)\big)^n = 1^n = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

  - × Si $t_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$:

$$h_n(t_0) = \big(\cos(t_0)\big)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \textit{(car } \cos(t_0) \in [0,1[\textit{ puisque } t_0 \in]0, \tfrac{\pi}{2}]\textit{)}$$

  Cela démontre que la suite de fonctions (h_n) converge simplement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ vers la fonction :

$$h : t \mapsto \begin{cases} 1 & \textit{si } t = 0 \\ 0 & \textit{si } t \in]0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

- ▶ De plus la fonction h est continue **par morceaux** sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- ▶ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction h_n est continue (par morceaux) sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- ▶ Par ailleurs, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|h_n(t)| = \left|\big(\cos(t)\big)^n\right| = |\cos(t)|^n \leqslant 1$$

  et $\varphi : t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
  Cette inégalité démontre au passage que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction h_n est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Finalement, par théorème de convergence dominée, la fonction h est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} h_n(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\lim_{n\to+\infty} h_n(t)\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t)\, dt = \int_0^{1} 0\, dt = 0$$

$$\boxed{\text{Finalement : } |u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

□

c) Prouver que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge.

Démonstration.

- Dans la suite, notons (a_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = (-1)^n\ u_n$$

(avec cette définition : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n\ a_n$)

- Les propriétés suivantes sont vérifiées :
  × la série $\sum\ (-1)^n\ a_n$ est une série alternée puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n \ = \ (-1)^n\ u_n \ = \ (-1)^n\ (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(t)\right)^n\ dt \ = \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(t)\right)^n\ dt \ \geqslant \ 0$$

  (en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|\,u_n\,| = a_n$)

  × la suite (a_n) est décroissante (c'est le résultat de la question ***1a***),

  × $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$ (c'est le résultat de la question ***1b***).

$$\boxed{\text{Par le critère spécial des séries alternées, la série numérique } \sum\ (-1)^n\ a_n \text{ est donc convergente.}}$$

□

2. Calcul de la somme de cette série

a) Soit t un réel. Linéariser $\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2$.

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord que pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cos(2u) &= \cos(u) \times \cos(u) \ - \ \sin(u) \times \sin(u) \\ &= \left(\cos(u)\right)^2 \ - \ \left(\sin(u)\right)^2 \\ &= \left(\cos(u)\right)^2 \ - \ \left(1 - \left(\cos(u)\right)^2\right) \\ &= 2\left(\cos(u)\right)^2 \ - \ 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R},\ \left(\cos(u)\right)^2 \ = \ \frac{1 + \cos(2u)}{2}}$$

$$\boxed{\text{En appliquant ce résultat en } u = \frac{t}{2} \in \mathbb{R}, \text{ on obtient : } \left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 \ = \ \frac{1+\cos(t)}{2}.}$$

Commentaire

- Dans cette question, on a détaillé comment obtenir la première formule de trigonométrie en exploitant la formule donnant la valeur du cosinus de l'angle double. Il n'est pas obligatoire de rédiger ces étapes de démonstration car, au vu de la question, connaître le résultat suffit pour obtenir les points.
- En cas de doute sur la formule apprise, il est conseillé d'écrire ces différentes étapes de calcul pour retrouver rapidement ladite formule.

□

b) En déduire $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(t)}\,dt$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(t)}\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2}\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2}\,dt \\
&= \Big[\tan\left(\frac{t}{2}\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan(0) \\
&= 1-0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } I = 1.}$$

□

c) **Intégration terme à terme ?**

(i) Déterminer une relation de récurrence entre $|\,u_{n+2}\,|$ et $|\,u_n\,|$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord, d'après la question ***1a*** :

$$|\,u_{n+2}\,| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(t)\big)^{n+2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\times\big(\cos(t)\big)^{n+1}\,dt$$

- On procède alors par intégration par parties.

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\times\big(\cos(t)\big)^{n+1}\,dt \\
&= \Big[\sin(t)\times\big(\cos(t)\big)^n\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\times(n+1)\big(\cos(t)\big)^n\big(-\sin(t)\big)\,dt \\
&= \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\times\left(\cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right)^n - \cancel{\sin(0)}\times\big(\cos(0)\big)^n\right) + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t)\big)^2\big(\cos(t)\big)^n\,dt \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\big(\cos(t)\big)^2\right)\big(\cos(t)\big)^n\,dt \\
&= (n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(t)\big)^n\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(t)\big)^2\big(\cos(t)\big)^n\,dt\right)
\end{aligned}$$

- On en conclut : $$\begin{array}{rcl} |\,u_{n+2}\,| &=& (n+1)\,|\,u_n\,| - (n+1)\,|\,u_{n+2}\,| \\ \text{donc} \quad (n+2)\,|\,u_{n+2}\,| &=& (n+1)\,|\,u_n\,| \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N},\ \ |\,u_{n+2}\,| \ = \ \frac{n+1}{n+2}\,|\,u_n\,|.}$$

□

(ii) Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Démonstration.
Montrons par récurrence double : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)$: $|\,u_n\,| \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.

- ▸ **Initialisation** :

  × D'une part : $|\,u_0\,| \ = \ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(t)\big)^0\, dt \ = \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dt \ = \ \left(\frac{\pi}{2} - 0\right)$

  × D'autre part : $\dfrac{1}{0+1} = 1$

  On a bien : $\dfrac{\pi}{2} \geqslant 1$ puisque : $\pi \geqslant 2$. D'où $\mathscr{P}(0)$.

  × D'une part : $|\,u_1\,| \ = \ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(t)\big)^1\, dt \ = \ [\,\sin(t)\,]_0^{\frac{\pi}{2}} \ = \ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \ - \ \sin(0) \ = \ 1.$

  × D'autre part : $\dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.

  On a bien : $1 \geqslant \dfrac{1}{2}$. D'où $\mathscr{P}(1)$.

- ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$. Démontrons $\mathscr{P}(n+2)$ (c'est-à-dire $|\,u_{n+2}\,| \geqslant \dfrac{1}{(n+2)+1}$).

  D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcll} |\,u_{n+2}\,| &=& \dfrac{n+1}{n+2}\,|\,u_n\,| & \\ &\geqslant& \dfrac{\cancel{n+1}}{n+2}\,\dfrac{1}{\cancel{n+1}} & \textit{(car } |\,u_n\,| \geqslant \dfrac{1}{n+1} \\ & & & \textit{par hypothèse de récurrence)} \\ &\geqslant& \dfrac{1}{n+3} & \textit{(car } n+2 \leqslant n+3 \textit{ et par décroissance} \\ & & & \textit{de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \end{array}$$

  D'où $\mathscr{P}(n+2)$.

Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \geqslant \frac{1}{n+1}}$$

□

(iii) Peut-on utiliser un théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions pour calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$?
On justifiera rigoureusement la réponse.

Démonstration.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $g_n : t \mapsto (-1)^n\, \big(\cos(t)\big)^n$.

- Remarquons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\, g_n(t)\,|\, dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\,(-1)^n \,\big(\cos(t)\big)^n\,\right|\, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\,(-1)^n\,|\, \left|\,\big(\cos(t)\big)^n\,\right|\, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(t)\big)^n\, dt && \textit{(puisque si } t \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\ \big(\cos(t)\big)^n \geqslant 0\textit{)} \\
&= |\, u_n\,|
\end{aligned}$$

- Remarquons :
  - $\times$ $\forall n \in \mathbb{N},\ |\, u_n\,| \geqslant \dfrac{1}{n+1} \geqslant 0$
  - $\times$ La série $\sum \dfrac{1}{n+1}$ diverge en tant que série de Riemann (à un décalage d'indice près) d'exposant 1 ($\not> 1$).

Ainsi, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\ |\, u_n\,|$ diverge.

> On en déduit que la série $\sum \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\, g_n(t)\,|\, dt$ diverge. Cette hypothèse n'étant pas vérifiée, il n'est pas possible d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme. □

d) On pose, pour tout $t \in \big[0; \frac{\pi}{2}\big]$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n(t) = (-1)^n \big(\cos(t)\big)^n \qquad \text{et} \qquad V_n(t) = \sum_{k=0}^{n} v_k(t)$$

En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculer la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Démonstration.
Il s'agit d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} v_k\right)$.

(i) Existence d'une limite finie - étude « en n »

► Soit $t_0 \in\,]0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} v_k(t_0) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \big(\cos(t_0)\big)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \big(-\cos(t_0)\big)^k \\
&= \frac{1-\big(-\cos(t_0)\big)^{n+1}}{1-\big(-\cos(t_0)\big)} && \textit{(par somme des termes d'une suite géométriques de raison } -\cos(t_0) \neq 1\textit{)} \\
&= \frac{1-\big(-\cos(t_0)\big)^{n+1}}{1+\cos(t_0)}
\end{aligned}$$

Or, pour tout $t_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $-\cos(t_0) \in [0, -1[$.
On en déduit : $\big(-\cos(t_0)\big)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi :

$$\frac{1-\big(-\cos(t_0)\big)^{n+1}}{1+\cos(t_0)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1-0}{1+\cos(t_0)}$$

Cela démontre que la suite de fonctions $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} v_k\right)$ converge simplement sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ vers la fonction :

$$V : t \mapsto \frac{1}{1+\cos(t)}$$

- De plus la fonction h est continue (par morceaux) sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

(ii) $\boxed{\text{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \text{ »}}$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction v_n est continue (par morceaux) sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.
- Par ailleurs, pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
|V_n(t)| &= \left|\frac{1-\big(-\cos(t)\big)^{n+1}}{1+\cos(t)}\right| \\
&= \frac{\left|1-\big(-\cos(t)\big)^{n+1}\right|}{|1+\cos(t)|} \\
&= \frac{\left|1-\big(-\cos(t)\big)^{n+1}\right|}{1+\cos(t)} \\
&\leqslant \frac{|1|+\left|\big(-\cos(t)\big)^{n+1}\right|}{1+\cos(t)} \\
&= \frac{1+\big(|-\cos(t)|\big)^{n+1}}{1+\cos(t)} \\
&= \frac{1+1}{1+\cos(t)}
\end{aligned}$$

(car $0 \leqslant |-\cos(t)| = \cos(t) \leqslant 1$ et que la fonction élévation à la puissance $n+1$ est croissante sur $[0, +\infty[$)

et $\varphi : t \mapsto \dfrac{2}{1+\cos(t)}$ est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ (comme vu en question ***2b***).
Cette inégalité démontre au passage que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction V_n est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

Finalement, par théorème de convergence dominée, la fonction V est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} V_n(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\lim_{n\to+\infty} V_n(t)\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} V(t)\,dt = \int_0^{1} \frac{1}{1+\cos(t)}\,dt \quad (*)$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} V_n(t)\ dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{k=0}^{n} v_k(t) \right)\ dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} v_k(t)\ dt & \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(t)\big)^k\ dt & \textit{(toujours par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} u_k
\end{aligned}$$

Le résultat $(*)$ démontre que la série $\sum\ u_n$ est convergente et de somme :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k \right) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} V_n(t)\ dt = I = 1$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 1}$$

Commentaire

- En question ***1b***, on utilise le théorème de convergence dominée pour déterminer la limite d'une suite d'intégrale. On avait alors considéré que l'intervalle d'intégration était $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ici, on considère que l'intervalle d'intégration est $]0, \frac{\pi}{2}]$. Il est légitime de se poser la question de cette différence. Tout d'abord, il faut comprendre que le théorème de convergence dominée peut s'appliquer quel que soit le type d'intervalle d'intégration (ouvert, fermé ou semi-ouvert). Dès lors, le bon choix d'intervalle est celui qui nous arrange le plus.
- De manière générale, il est conseillé de considérer l'intervalle ouvert puisqu'il permet de ne pas amener à une éventuelle discussion du comportement des fonctions sur les bords de l'intervalle. En considérant l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ en question ***1b***, il n'y aurait pas eu à traiter à part le cas $t_0 = 0$. Il est à noter que pour cette toute dernière question de l'énoncé, choisir l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ serait un problème car si $t = 0$, la quantité :

$$V_n(0) = \frac{1 - \big(-\cos(0)\big)^{n+1}}{1 + \cos(0)} = \frac{1 - \big(-1\big)^{n+1}}{2}$$

n'admet pas de limite en $+\infty$.

□