DS1

Avertissements

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les candidats sont invités à encadrer leurs résultats.
- **L'usage des calculatrices, ou de tout autre dispositif électronique, est interdit**.

Problème 1 - Sommes partielles de séries divergentes

- Dans tout le problème, on dit qu'une suite réelle $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ vérifie la propriété (P) si :

$$(P) : \begin{cases} \bullet \text{ la suite } (a_n)_{n\geqslant n_0} \text{ est bornée et à termes strictement positifs,} \\ \bullet \text{ la série } \sum a_n \text{ diverge.} \end{cases}$$

On note alors : $\forall n \geqslant n_0$, $A_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} a_k$, et lorsque cela est possible : $b_n = \dfrac{1}{\ln(A_n)} \sum\limits_{k=n_0}^{n} \dfrac{a_k}{A_k}$.

- Dans tout le problème, on admettra et on pourra librement utiliser le résultat suivant, que l'on nomme **Théorème (T)** :

> Soient $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites réelles **à termes strictement positifs**.
>
> **Si** $\begin{cases} \textit{a)}\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ \textit{b)}\ \text{la série } \sum u_n \text{ diverge} \end{cases}$ **alors** $\sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum\limits_{k=n_0}^{n} v_k$.

1. Montrer que le théorème (T) s'applique aux suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = \ln(n+1) - \ln(n)$$

En déduire : $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

2. On pose cette fois, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$w_n = \frac{1}{n\ln(n)} \quad \text{et} \quad x_n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n))$$

a) Vérifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} x_n$ diverge et : $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.

b) En déduire, à l'aide du théorème (T), que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln(n)}$ diverge et :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$$

3. Retrouver les résultats de la question ***2.b)*** à l'aide d'une comparaison série-intégrale, sans utiliser le théorème (T).

4. Étude de la suite (b_n) sur deux exemples.

a) On note dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 1$.

(i) Vérifier que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ainsi définie satisfait à la propriété (P).

(ii) À l'aide de la question ***1***, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

b) On note dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{1}{n}$.

(i) Vérifier que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ainsi définie satisfait à la propriété (P).

(ii) À l'aide du théorème (T) et des questions ***1*** et ***2***, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

5. On revient au cas général et on considère une suite $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ qui satisfait à la propriété (P).

a) Montrer : $A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} A_{n-1}$.

b) Montrer : $\dfrac{a_n}{A_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\dfrac{A_n}{A_{n-1}}\right)$.

c) Déterminer alors la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} \dfrac{a_n}{A_n}$.

d) À l'aide du théorème (T) et des questions précédentes, déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

6. Au vu des résultats précédents, que pensez-vous de la véracité de l'énoncé suivant :

« Pour toute série divergente $\sum u_n$ à termes strictement positifs, il existe une série divergente $\sum v_n$ à termes strictement positifs tels que $v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)$. »

Indication : on pourra commencer par considérer le cas où la suite (u_n) est bornée, et dans le cas contraire considérer la suite (u'_n) où $u'_n = \min\{u_n, 1\}$.

Problème 2 - Étude d'une suite de racines de polynômes

On note, pour tout n de $\mathbb{N}$, P_n la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!}$$

PARTIE A : Étude de la suite des racines des polynômes P_n

1. a) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, les limites de P_n en $+\infty$ et $-\infty$.

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, le polynôme P_n admet au moins une racine réelle.

2. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ P'_n(x) = -P_n(x) - \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, les racines de P_n ne sont pas racines de P'_n.

3. a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \dfrac{x}{2k+1}\right)$.

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, les racines réelles de P_n appartiennent nécessairement à l'intervalle $[1, 2n+1]$.

4. a) Montrer les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} P'_{n+1}(x) = -P_n(x) - \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}, \\ P''_{n+1}(x) = P_n(x) \end{cases}$$

b) Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction P_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'une seule fois, en un réel noté u_n.

5. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(u_n) = \dfrac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1 - \dfrac{u_n}{2n+3}\right)$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

PARTIE B : Équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

6. Démontrer à l'aide de la formule de Stirling : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = \mathrm{e}^{-1}$.

7. On note g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $\forall t \in\,]0, +\infty[,\ g(t) = t + \ln(t) + 1$.

Montrer qu'il existe un unique α appartenant à $]0, +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$ et justifier :

$$\mathrm{e}^{-2} < \alpha < \mathrm{e}^{-1}$$

8. a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\mathrm{e}^{-x} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$.

b) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\displaystyle 0 \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\, dt \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $P_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant P_n(x) + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer : $P_{n+1}(u_n) \leqslant \mathrm{e}^{-u_n} \leqslant \dfrac{(u_n)^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

b) En utilisant le résultat des questions ***3.b)*** et ***5.a)***, obtenir : $\dfrac{2\,(u_n)^{2n}}{(2n+3)!} \leqslant \mathrm{e}^{-u_n} \leqslant \dfrac{(u_n)^{2n}}{(2n)!}$. Puis :

$$(2n)! \ \leqslant\ (u_n)^{2n}\,\mathrm{e}^{u_n} \ \leqslant\ \frac{(2n+3)!}{2}$$

10. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $w_n = \dfrac{u_n}{2n}$.

a) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\left((2n)!\right)^{\frac{1}{2n}}}{2n} \leqslant w_n \mathrm{e}^{w_n} \leqslant \left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \frac{\left((2n)!\right)^{\frac{1}{2n}}}{2n}$$

b) En déduire que la suite $(g(w_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 puis que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers α, la fonction g et le réel α étant définis dans la question ***7***.

11. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème 3 : Somme d'une série de Riemann usuelle

Le but de ce problème est d'établir la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$ et de montrer :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Les deux méthodes proposées ci-dessous doivent évidemment être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Méthode 1 - Utilisation d'un polynôme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On considère le polynôme P défini par : $P(X) = 2 \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} X^k$.

a) À l'aide de la formule du binôme, démontrer : $P\left(X^2\right) = (X+1)^{2n+1} - (X-1)^{2n+1}$.

b) En déduire que les racines de P sont les réels $\dfrac{-1}{\tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

c) Justifier : $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \dfrac{n(2n-1)}{3}$.

2. Montrer : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\dfrac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \dfrac{1}{\tan^2(x)}$.
En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$.

3. Montrer : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$. En déduire l'encadrement suivant :

$$\frac{n(2n-1)}{3} \leqslant \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{2n(n+1)}{3}.$$

4. Établir que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Méthode 2 - Utilisation des intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\ dt, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\ \cos^{2n}(t)\ dt \quad \text{et} \quad K_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}\ J_n$$

5. Calculer I_0, J_0 et K_0.

6. ***a)*** À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} I_0$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Démontrer la relation : $I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$.

b) En déduire : $K_{n-1} - K_n = \frac{\pi}{4n^2}$, puis : $\frac{\pi}{4} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = K_0 - K_n$.

8. Montrer : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $t \leqslant \dfrac{\pi}{2}\, \sin(t)$. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2 I_n}{8(n+1)} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant K_n \leqslant \frac{\pi^3}{16(n+1)}$$

9. Déduire des résultats de cette partie que la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge et : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.