DS1 /189

Avertissements

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les candidats sont invités à encadrer leurs résultats.
- **L'usage des calculatrices, ou de tout autre dispositif électronique, est interdit**.

Problème 1 - Sommes partielles de séries divergentes /58

- Dans tout le problème, on dit qu'une suite réelle $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ vérifie la propriété (P) si :

$$(P) : \begin{cases} \bullet \text{ la suite } (a_n)_{n\geqslant n_0} \text{ est bornée et à termes strictement positifs,} \\ \bullet \text{ la série } \sum a_n \text{ diverge.} \end{cases}$$

On note alors : $\forall n \geqslant n_0,\ A_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} a_k$, et lorsque cela est possible : $b_n = \dfrac{1}{\ln(A_n)} \sum\limits_{k=n_0}^{n} \dfrac{a_k}{A_k}$.

- Dans tout le problème, on admettra et on pourra librement utiliser le résultat suivant, que l'on nomme **Théorème (T)** :

> Soient $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites réelles **à termes strictement positifs**.
>
> **Si** $\begin{cases} \textbf{\textit{a)}}\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ \textbf{\textit{b)}}\ \text{la série } \sum u_n \text{ diverge} \end{cases}$ **alors** $\sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum\limits_{k=n_0}^{n} v_k$.

1. Montrer que le théorème (T) s'applique aux suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = \ln(n+1) - \ln(n)$$

En déduire : $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. **Donc :** $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$**. Ainsi :** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$
- **1 pt : la série** $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ **est une série de Riemann d'exposant** 1 $(1 \not> 1)$**. Elle est donc divergente. On en déduit que la série** $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ **est divergente.**
- **1 pt : d'après le théorème (T)** $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum\limits_{k=1}^{n} v_k$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n} v_k = \ln(n+1)$
- **1 pt :** $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$

2. On pose cette fois, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$w_n = \frac{1}{n\ln(n)} \qquad \text{et} \qquad x_n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n))$$

a) Vérifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} x_n$ diverge et : $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=2}^{n} x_k = \ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(2)\big)$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\big(\ln(n+1)\big) = +\infty$ **donc** $\sum x_n$ **divergente**
- **2 pts :** $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$

b) En déduire, à l'aide du théorème (T), que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln(n)}$ diverge et :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$$

- **1 pt : d'après le théorème (T)** $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\ \ln(k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum\limits_{k=2}^{n} x_k$
- **1 pt : la suite** $\left(\sum\limits_{k=2}^{n} x_k\right)$ **est divergente d'après la question précédente. Comme deux suites équivalentes ont même nature, on en déduit que la suite** $\left(\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\ \ln(k)}\right)$ **est divergente.**
- **1 pt :** $\ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\big(\ln(n)\big)$
- **0 pt :** $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\ \ln(k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum\limits_{k=2}^{n} x_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\big(\ln(n)\big)$

3. Retrouver les résultats de la question *2.b)* à l'aide d'une comparaison série-intégrale, sans utiliser le théorème (T).

- **1 pt : par décroissance de la fonction** $x \mapsto \dfrac{1}{x\ \ln(x)}$ **sur** $]1,+\infty[$**,** $\dfrac{1}{k\ \ln(k)} \geqslant \dfrac{1}{x\ \ln(x)} \geqslant \dfrac{1}{(k+1)\ \ln(k+1)}$
- **1 pt : Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'odre croissant** $(k \leqslant k+1)$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x\ \ln(x)}\ dx = \big[\ \ln\big(|\ln(x)|\big)\ \big]_k^{k+1} = \ln\big(\ln(k+1)\big) - \ln\big(\ln(k)\big)$
- **1 pt : en sommant les encadrements précédents pour** k **variant de** 2 **à** n**, on obtient :** $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{(k+1)\ \ln(k+1)} \leqslant \ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) \leqslant \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\ \ln(k)}$
- **1 pt : avec l'inégalité de droite et comme** $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) = +\infty$**, alors la série** $\sum \dfrac{1}{n\ \ln(n)}$ **est divergente**
- **1 pt : avec l'inégalité de gauche** $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\ \ln(k)} \leqslant \ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) + \dfrac{1}{2\ \ln(2)}$
- **1 pt : en rassemblant les deux inégalités, comme** $\ln\big(\ln(n)\big) > 0$ **pour** $n \geqslant 3$**, on a :** $\dfrac{\ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(2)\big)}{\ln\big(\ln(n)\big)} \leqslant \dfrac{\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\ \ln(k)}}{\ln\big(\ln(n)\big)} \leqslant \dfrac{\ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) + \dfrac{1}{2\ \ln(2)}}{\ln\big(\ln(n)\big)}$

- **1 pt : comme** $\ln\big(\ln(n+1)\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\big(\ln(n)\big)$ **alors d'une part :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(2)\big)}{\ln\big(\ln(n)\big)} = 1$ **et d'autre part :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) + \dfrac{1}{2\,\ln(2)}}{\ln\big(\ln(n)\big)} = 1$
- **1 pt : par théorème d'encadrement** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\,\ln(k)}}{\ln\big(\ln(n)\big)} = 1$ **donc** $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\,\ln(k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\big(\ln(n)\big)$

4. Étude de la suite (b_n) sur deux exemples.

a) On note dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 1$.

(i) Vérifier que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ainsi définie satisfait à la propriété (P).

- **1 pt : La suite** (a_n) **est la suite constante égale à** 1**. Elle est donc bornée et :** $\forall n \in \mathbb{N}^*$**,** $a_n > 0$**.**
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$**. La série** $\sum a_n$ **est donc divergente**

(ii) À l'aide de la question ***1***, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

- **1 pt :** $b_n = \dfrac{1}{\ln(n)} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$
- **1 pt : d'après *1.*,** $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$**. Donc :** $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln(n)} \times \ln(n) = 1$**. Ainsi :** $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1$

b) On note dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{1}{n}$.

(i) Vérifier que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ainsi définie satisfait à la propriété (P).

- **1 pt : on remarque :** $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < a_n \leqslant 1$**. La suite** (a_n) **est donc bornée et à termes strictement positifs.**
- **1 pt : d'après la question *1.*, la série** $\sum \dfrac{1}{n}$ **est divergente. Autrement dit, la série** $\sum a_n$ **est divergente**

(ii) À l'aide du théorème (T) et des questions ***1*** et ***2***, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

- **0 pt :** $b_n = \dfrac{1}{\ln(A_n)} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k\,A_k}$
- **2 pts :** $u_n = \dfrac{1}{n\,\ln(n)}$ **et** $v_n = \dfrac{1}{n\,A_n}$ **satisfont les hypothèses de (T)**
  - × **1 pt : D'après la question *1.* :** $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$**. Donc :** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$
  - × **1 pt : d'après la question *2.b)*, la série** $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ **est divergente**
- **1 pt : d'après le théorème (T),** $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\,\ln(A_k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\,\ln(k)}$
- **1 pt :** $\ln(A_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\big(\ln(n)\big)$
- **1 pt :** $b_n = \dfrac{1}{\ln\big(A_n\big)} \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\,A_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln\big(\ln(n)\big)} \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\,\ln(k)}$**. Donc, d'après *2.b)* :** $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1$

5. On revient au cas général et on considère une suite $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ qui satisfait à la propriété (P).

a) Montrer : $A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} A_{n-1}$.

- **1 pt :** $\dfrac{A_n}{A_{n-1}} = 1 + \dfrac{a_n}{A_{n-1}}$
- **1 pt :** $\lim n \to +\infty A_n = +\infty$ **car** $\sum a_n$ **à termes positifs et divergente**
- **1 pt : de plus** (a_n) **bornée donc** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{A_{n-1}} = 0$

b) Montrer : $\dfrac{a_n}{A_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\dfrac{A_n}{A_{n-1}}\right)$.

- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{A_{n-1}} = 0$ **donc** $\ln\left(\dfrac{A_n}{A_{n-1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a_n}{A_{n-1}}$
- **1 pt : d'après la question précédent,** $A_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} A_n$ **donc** $\ln\left(\dfrac{A_n}{A_{n-1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a_n}{A_n}$

c) Déterminer alors la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} \dfrac{a_n}{A_n}$.

- **1 pt :** $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $\dfrac{a_n}{A_n} \geqslant 0$
- **1 pt : d'après la question précédente** $\dfrac{a_n}{A_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\dfrac{A_n}{A_{n-1}}\right)$
- **1 pt : la série** $\sum \ln\left(\dfrac{A_n}{A_{n-1}}\right)$ **est une série divergente. En effet, pour tout** $n \in [\![n_0, +\infty[\![$ **:** $\sum\limits_{k=n_0}^{n} \ln\left(\dfrac{A_k}{A_{k-1}}\right) = \ln(A_n) - \ln(A_{n_0-1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

d) À l'aide du théorème (T) et des questions précédentes, déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

- **1 pt : d'après *5.b)* :** $\dfrac{a_n}{A_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\dfrac{A_n}{A_{n-1}}\right)$
- **1 pt : d'après *5.c)*, la série** $\sum \dfrac{a_n}{A_n}$ **est divergente**
- **1 pt : d'après le théorème (T),** $\sum\limits_{k=n_0}^{n} \dfrac{a_k}{A_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum\limits_{k=n_0}^{n} \ln\left(\dfrac{A_k}{A_{k-1}}\right) = \ln(A_n) - \ln(A_{n_0-1})$
- **1 pt :** $\ln(A_n) - \ln(A_{n_0-1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(A_n)$
- **1 pt :** $b_n = \dfrac{1}{\ln(A_n)} \sum\limits_{k=n_0}^{n} \dfrac{a_k}{A_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln(A_n)} \times \ln(A_n) = 1$

6. Au vu des résultats précédents, que pensez-vous de la véracité de l'énoncé suivant :

« Pour toute série divergente $\sum u_n$ à termes strictement positifs, il existe une série divergente $\sum v_n$ à termes strictement positifs tels que $v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)$. »

Indication : on pourra commencer par considérer le cas où la suite (u_n) *est bornée, et dans le cas contraire considérer la suite* (u'_n) *où* $u'_n = \min\{u_n, 1\}$.

- **4 pts : cas (u_n) bornée**
  - × **1 pt : la suite (u_n) est bornée et à termes strictement positifs et la série $\sum u_n$ est divergente. On est donc dans le cadre d'application de la question *5*.**
  - × **1 pt : $\sum v_n$ où $v_n = \dfrac{u_n}{U_n}$ est donc divergente ($U_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$)**
  - × **1 pt : $\sum v_n$ à termes strictement positifs (car : $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $u_n > 0$)**
  - × **1 pt : $v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)$ car $\sum u_n$ à termes positifs et divergente.**
- **7 pts : cas (u_n) non bornée**
  - × **1 pt : (u'_n) bornée par construction**
  - × **1 pt : $\sum u'_n$ à termes strictement positifs**
  - × **2 pts : $\sum u'_n$ divergente**
    - **1 pt : (u'_n) n'est pas majorée. Il existe donc une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ qui ne comporte que des termes supérieurs à 1. Par construction, la suite $(u'_{\varphi(n)})$ est donc constante égale à 1.**
    - **1 pt : Puisque la suite (u'_n) admet une sous-suite $(u'_{\varphi(n)})$ qui converge vers 1, on en déduit que (u'_n) ne converge pas vers 0**
  - × **1 pt : d'après le cas précédent, il existe (v_n) telle que la série $\sum v_n$ est divergente et à termes strictement positifs et : $v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(u'_n)$**
  - × **2 pts : $v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)$**
    - **1 pt : $0 \leqslant \dfrac{v_n}{u_n} \leqslant \dfrac{v_n}{u'_n}$**
    - **1 pt : théorème d'encadrement**

Problème 2 - Étude d'une suite de racines de polynômes /72

On note, pour tout n de $\mathbb{N}$, P_n la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!}$$

PARTIE A : Étude de la suite des racines des polynômes P_n

1. a) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, les limites de P_n en $+\infty$ et $-\infty$.

- **1 pt : $\lim\limits_{x\to+\infty} P_n(x) = -\infty$ en utilisant un équivalent ou une factorisation**
- **1 pt : $\lim\limits_{x\to-\infty} P_n(x) = +\infty$ en utilisant un équivalent ou une factorisation**

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, le polynôme P_n admet au moins une racine réelle.

- **1 pt : P_n est continue sur $\mathbb{R}$**
- **1 pt : citation du théorème des valeurs intermédiaires + référence à la question précédente**

2. ***a)*** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_n'(x) = -P_n(x) - \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

- **1 pt : P_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale**
- **1 pt : $P_n'(x) = 0 + \sum\limits_{k=1}^{2n+1} \dfrac{k \times (-1) \times (-x)^{k-1}}{k!} = -\sum\limits_{k=0}^{2n} \dfrac{(-x)^k}{k!}$ (par décalage d'indice)**
- **1 pt : $P_n'(x) = -\left(\sum\limits_{k=0}^{2n+1} \dfrac{(-x)^k}{k!} - \dfrac{(-1)^{2n+1}\ x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = -\left(P_n(x) + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$**

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, les racines de P_n ne sont pas racines de P_n'.

- **1 pt : si x_0 est une racine de P_n et de P_n', alors $x_0 = 0$.**
- **1 pt : $P_n(0) = 1$.**

3. ***a)*** Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} \left(1 - \dfrac{x}{2k+1}\right)$.

- **1 pt :** $\sum\limits_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \dfrac{(-x)^k}{k!} = \sum\limits_{p=0}^{n} \dfrac{x^{2p}}{(2p)!}$
- **1 pt :** $\sum\limits_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \dfrac{(-x)^k}{k!} = -\sum\limits_{p=0}^{n} \dfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$
- **1 pt : fin du calcul**

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, les racines réelles de P_n appartiennent nécessairement à l'intervalle $[1, 2n+1]$.

- **4 pts : Cas $x \in\ ]-\infty, 1[$**
  - × **1 pt : $1 - \dfrac{x}{2k+1} > 0$**
  - × **1 pt : si $x = 0$, on a déjà démontré en question *2.b)* qu'alors x n'est pas racine de P_n**
  - × **2 pts : si $x \neq 0$, $P_n(x) > 0$**
    - **- 1 pt : $\dfrac{x^{2k}}{(2k)!} \left(1 - \dfrac{x}{2k+1}\right) > 0$**
    - **- 1 pt : on somme ces inégalités strictes pour k variant de 0 à n**
- **2 pts : Cas $x \in\ ]2n+1, +\infty[$ (raisonnement similaire)**

4. ***a)*** Montrer les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} P_{n+1}'(x) = -P_n(x) - \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}, \\ P_{n+1}''(x) = P_n(x) \end{cases}$$

- **1 pt : calcul de P_{n+1}' avec *2.a)***
- **1 pt : P_{n+1} est de classe $\mathcal{C}^2$ car polynomiale**
- **1 pt : dérivation de la formule précédente et simplification**

b) Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction P_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'une seule fois, en un réel noté u_n.

- **1 pt : Initialisation**
- **7 pts : Hérédité**
  - × **2 pts : Tableau de variations de P'_{n+1}**

x	$-\infty$		u_n		$+\infty$
Signe de $P''_{n+1}(x) = P_n(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de P'_{n+1}		$\nearrow$		$\searrow$	

  - × **2 pts : Tableau de variations de P_{n+1}**

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $P'_{n+1}(x)$		$-$	
Variations de P_{n+1}	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

  - × **1 pt : hypothèses du théorème de la bijection**
  - × **1 pt :** $P_{n+1}(\,]-\infty,+\infty[\,) =]-\infty,+\infty[$
  - × **1 pt :** $0 \in]-\infty,+\infty[$

5. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(u_n) = \dfrac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1 - \dfrac{u_n}{2n+3}\right)$.

- **1 pt : Utilisation de la question *3.a)* avec P_{n+1}**
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{u_n^{2k}}{(2k)!}\left(1-\frac{u_n}{2k+1}\right) = P_n(u_n) + \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1-\frac{u_n}{2n+3}\right) = 0 + \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1-\frac{u_n}{2n+3}\right)$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

- **1 pt :** $P_{n+1}(u_n) \geqslant 0 = P_{n+1}(u_{n+1})$
- **1 pt : application de la bijection réciproque de P_{n+1}, également strictement décroissante sur $\mathbb{R}$**

PARTIE B : Équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

6. Démontrer à l'aide de la formule de Stirling : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = \mathrm{e}^{-1}$.

- **1 pt :** $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathbf{e}}\right)^n$
- **1 pt :** $(n!)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathbf{e}}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}$
- **1 pt :** $\left(\sqrt{2\pi n}\right)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
- **1 pt :** $\dfrac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\sqrt{2\pi n}\right)^{\frac{1}{n}} \dfrac{\cancel{n}}{\mathbf{e}} \dfrac{1}{\cancel{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\mathbf{e}}$

7. On note g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $\forall t \in\,]0,+\infty[,\ g(t) = t + \ln(t) + 1$.

Montrer qu'il existe un unique α appartenant à $]0,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$ et justifier :

$$\mathrm{e}^{-2} < \alpha < \mathrm{e}^{-1}$$

- **1 pt : hypothèses citées : g continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$**
- **1 pt : $g(\,]0,+\infty[\,) =]-\infty,+\infty[$**
- **1 pt : $0 \in]-\infty,+\infty[$**
- **1 pt : $g(\mathrm{e}^{-2}) \ < \ g(\alpha) \ < \ g(\mathrm{e}^{-1})$**
- **1 pt : application de la fonction réciproque de g, également strictement croissante sur $\mathbb{R}$**

8. a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$.

- **1 pt : initialisation**
- **6 pts : hérédité**
  - × **1 pt : l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$ est bien définie car l'intégrande $t \mapsto \dfrac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!}\ \mathrm{e}^{-t}$ est continu sur le `SEGMENT` d'extrémités 0 et x en tant que produit de fonctions continues sur ce segment**
  - × **1 pt : Cette IPP est valide car la fonction u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le `SEGMENT` d'extrémités 0 et x en tant que fonction polynomiale et la fonction $v : t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le `SEGMENT` d'extrémités 0 et x.**
  - × **1 pt : $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt = \frac{1}{(2n+2)!}\ x^{2n+2} \ - \ \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$**
  - × **1 pt : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-x)^k}{k!} \ - \ \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!} \ + \ \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$**
  - × **1 pt : par IPP : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-x)^k}{k!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$**
  - × **1 pt : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt = \mathrm{e}^{-x}$ par hypothèse de récurrence**

b) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\ dt \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

- **1 pt : $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\ dt = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$**
- **1 pt : pour tout $t \in [0,x]$: $\dfrac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \ \geqslant \ 0$. Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant x)$: $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\ dt \ \geqslant \ 0$**

c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $P_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant P_n(x) + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

- **1 pt : par définition de $P_n(x)$ et d'après la question *8.a)* : $\mathrm{e}^{-x} - P_n(x) = \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ - \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$**
- **1 pt : $\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ - \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \geqslant 0$**

9. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer : $P_{n+1}(u_n) \leqslant \mathrm{e}^{-u_n} \leqslant \dfrac{(u_n)^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

- **1 pt : $\mathrm{e}^{-u_n} \leqslant P_n(u_n) + \dfrac{(u_n)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ et $P_n(u_n) = 0$**
- **1 pt : En appliquant l'inégalité de gauche de la question précédente en $n+1 \in \mathbb{N}$ et $x = u_n \in \mathbb{R}$, on obtient : $P_{n+1}(u_n) \leqslant \mathrm{e}^{-u_n}$**

b) En utilisant le résultat des questions ***3.b)*** et ***5.a)***, obtenir : $\dfrac{2\,(u_n)^{2n}}{(2n+3)!} \leqslant \mathrm{e}^{-u_n} \leqslant \dfrac{(u_n)^{2n}}{(2n)!}$. Puis :

$$(2n)! \leqslant (u_n)^{2n}\,\mathrm{e}^{u_n} \leqslant \frac{(2n+3)!}{2}$$

- **1 pt : d'après la question *3.b)* : $u_n \in [1, 2n+1]$.**
  Ainsi : $u_n \leqslant 2n+1$ et : $\dfrac{u_n}{2n+1} \leqslant 1$. Donc : $\mathrm{e}^{-u_n} \leqslant \dfrac{u_n}{2n+1}\,\dfrac{(u_n)^{2n}}{(2n)!} \leqslant \dfrac{(u_n)^{2n}}{(2n)!}$
- **1 pt : d'après *5.a)*, $P_{n+1}(u_n) = \dfrac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!} - \dfrac{u_n^{2n+3}}{(2n+3)!} \geqslant \dfrac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}$ (car $u_n^{2n+3} \geqslant 0$)**
- **2 pts : $\dfrac{(u_n)^{2n+2}}{(2n+2)!} \geqslant \dfrac{2\,(u_n)^{2n}}{(2n+3)!}$ (dont 1 pt pour $(u_n)^2 \geqslant 1 \geqslant \dfrac{2}{2n+3}$)**
- **1 pt : Toutes les quantités étant strictement positives et la fonction inverse étant décroissante sur $]0, +\infty[$: $\dfrac{(2n+3)!}{2\,(u_n)^{2n}} \geqslant \mathrm{e}^{u_n} \geqslant \dfrac{(2n)!}{(u_n)^{2n}}$**
- **1 pt : En multipliant de part et d'autre par $(u_n)^{2n} \geqslant 0$, on a le résultat**

10. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $w_n = \dfrac{u_n}{2n}$.

a) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n} \leqslant w_n \mathrm{e}^{w_n} \leqslant \left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \frac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n}$$

- **1 pt : d'après la question précédente : $(2n)! \leqslant (2n\,w_n)^{2n}\,\mathrm{e}^{2n\,w_n} \leqslant \dfrac{(2n+3)!}{2}$**
- **1 pt : par croissance de la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{2n}}$ sur $[0, +\infty[$: $\dfrac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n} \leqslant w_n\,\mathrm{e}^{w_n} \leqslant \left(\dfrac{(2n+3)!}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \times \dfrac{1}{2n}$**
- **1 pt : $\left(\dfrac{(2n+3)!}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \times \dfrac{1}{2n} \leqslant \left(\dfrac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \dfrac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n} \Leftrightarrow (2n+3)\,(2n+2)\,(2n+1) \leqslant (2n+3)^3$**
- **1 pt : $(2n+3)\,(2n+2)\,(2n+1) \leqslant (2n+3)^3$**

b) En déduire que la suite $(g(w_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 puis que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers α, la fonction g et le réel α étant définis dans la question ***7***.

- **1 pt : la fonction** $\ln$ **est croissante sur** $]0,+\infty[$ **donc**

$$\ln\left(\frac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n}\right) \leqslant w_n + \ln(w_n) \leqslant \ln\left(\frac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n}\right) + \frac{1}{2n}\ln\left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)$$

- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n}\ln\left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right) = 0$ **par croissances comparées**
- **2 pts :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n}\right) = -1$
  - × **1 pt : utilisation question *6*.**
  - × **1 pt :** (v_{2n}) **est une sous-suite de** (v_n) **donc converge vers la même limite** e^{-1}**.**
- **1 pt : par théorème d'encadrement,** $(g(w_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge vers 0**
- **1 pt : par continuité de** g^{-1} **en 0,** $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge vers** $g^{-1}(0) = \alpha$

11. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

- **1 pt : D'après la question précédente,** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{2n} = \alpha \neq 0$ **donc** $\frac{u_n}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha$
- **1 pt : on en déduit** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\alpha n$

Problème 3 : somme d'une série de Riemann usuelle /59

Le but de ce problème est d'établir la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$ et de montrer :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Les deux méthodes proposées ci-dessous doivent évidemment être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Méthode 1 - Utilisation d'un polynôme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On considère le polynôme P défini par : $P(X) = 2\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} X^k$.

a) À l'aide de la formule du binôme, démontrer : $P\left(X^2\right) = (X+1)^{2n+1} - (X-1)^{2n+1}$.

- **1 pt :** $(X+1)^{2n+1} - (X-1)^{2n+1} = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} 1^{2n+1-k} X^k - \sum\limits_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^{2n+1-k} X^k$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} 1^{2n+1-k} X^k - \sum\limits_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^{2n+1-k} X^k = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left(1+(-1)^k\right) X^k$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left(1+(-1)^k\right) X^k = 2\sum\limits_{j=0}^{n} \binom{2n+1}{2j} X^{2j} = P\left(X^2\right)$

b) En déduire que les racines de P sont les réels $\dfrac{-1}{\tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})}$ pour $k \in [\![1,n]\!]$.

- **1 pt : on note $Q(X) = P(X^2)$. D'après la question précédente : z racine de $Q \Leftrightarrow (z+1)^{2n+1} = (z-1)^{2n+1}$**
- **1 pt :** $(z+1)^{2n+1} = (z-1)^{2n+1} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (z+1)^{2n+1} = (z-1)^{2n+1} \\ z \neq 1 \end{array}\right.$
  (le cas $z=1$ est exclu car $(1+1)^{2n+1} \neq (1-1)^{2n+1}$)
- **1 pt :** $\left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^{2n+1} = 1 \\ z \neq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists k \in [\![0,2n]\!],\ \dfrac{z+1}{z-1} = \mathrm{e}^{i\,\frac{2k\pi}{2n+1}} \\ z \neq 1 \end{array}\right.$
- **1 pt :** $\left\{\begin{array}{l} \exists k \in [\![0,2n]\!],\ \dfrac{z+1}{z-1} = \mathrm{e}^{i\,\frac{2k\pi}{2n+1}} \\ z \neq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists k \in [\![1,2n]\!],\ z = -\dfrac{1+\mathrm{e}^{i\,\frac{2k\pi}{2n+1}}}{1-\mathrm{e}^{i\,\frac{2k\pi}{2n+1}}} \\ z \neq 1 \end{array}\right.$
  (car l'égalité n'est pas vérifiée pour $k=0$ puisque $0 \neq -2$)
- **1 pt :** $-\dfrac{1+\mathrm{e}^{i\,\frac{2k\pi}{2n+1}}}{1-\mathrm{e}^{i\,\frac{2k\pi}{2n+1}}} = \dfrac{1}{i\ \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$
- **1 pt : z racine de $Q \Leftrightarrow z^2$ racine de P**
- **1 pt : pour tout $k \in [\![1,2n]\!]$,** $\left(\dfrac{1}{i\ \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)^2 = \dfrac{-1}{\left(\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2}$ **est racine de P**
- **2 pts : démontrer que les n racines trouvées sont distinctes. (on note $u_k = \dfrac{k\pi}{2n+1}$ et $z_k = \dfrac{-1}{\left(\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2}$)**
  × **1 pt :** $u_1 < u_2 < \ldots < u_{2n-1} < u_{2n}$ **donc :** $\tan(u_1) < \ldots < tan(u_{2n})$
  (car $\tan$ **est une fonction strictement croissante sur** $]0,\frac{\pi}{2}[$**)**
  × **1 pt : stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$ et stricte croissance de $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.**

c) Justifier : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{n(2n-1)}{3}$.

- **0 pt : le coefficient dominant de P est** $2\dbinom{2n+1}{2n} = 2\,(2n+1)$
- **0 pt : P admet n racines distinctes et se factorise donc de la façon suivante :** $P(X) = 2\ (2n+1)\ \big(X - z_1\big)\ \ldots\ \big(X - z_n\big)$
- **1 pt :** $P(X) = 2\ (2n+1)\ \left(X^n - \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right) X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \displaystyle\prod_{k=1}^{n} z_k\right)$
- **1 pt : le coefficient du terme de degré $n-1$ de P est donc :** $-2\,(2n+1)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = 2\dbinom{2n+1}{2\,(n-1)}$ **(par définition de P)**
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \sum_{k=1}^{n} (-z_k) = \frac{n(2n-1)}{3}$

2. Montrer : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \ \dfrac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \dfrac{1}{\tan^2(x)}$.
En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$.

- **1 pt :** $\dfrac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \dfrac{1}{\tan^2(x)}$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\left(\sin\left(\frac{k\,\pi}{2n+1}\right)\right)^2} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{\left(\tan\left(\frac{k\,\pi}{2n+1}\right)\right)^2}\right)$
(d'après le point précédent et car : $\forall k \in [\![1, n]\!], \ u_k \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$**)**
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{\left(\tan\left(\frac{k\,\pi}{2n+1}\right)\right)^2}\right) = n + \dfrac{n\,(2n-1)}{3} = 2n\ \dfrac{n+1}{3}$

3. Montrer : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \ \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$. En déduire l'encadrement suivant :

$$\frac{n(2n-1)}{3} \ \leqslant \ \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \ \leqslant \ \frac{2n(n+1)}{3}.$$

- **1 pt :** $\sin$ **est concave sur** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ **car :** $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \ \sin''(x) = -\sin(x) \leqslant 0$
- **1 pt : la courbe représentative de** $\sin$ **est située, sur l'intervalle** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$**, en dessous de sa tangente au point d'abscisse** 0**. D'où :** $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \ \sin(x) \leqslant x$
- **1 pt :** $\tan$ **est convexe sur** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$**. Sa courbe représentative est située, sur l'intervalle** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$**, en dessous de sa tangente au point d'abscisse** 0**. Donc :** $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \ x \leqslant \tan(x)$
- **1 pt : par décroissance de la fonction inverse sur** $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ **et croissance de la fonction élévation au carré que** $\mathbb{R}_+$ **:** $\left(\dfrac{1}{\sin(u_k)}\right)^2 \ \geqslant \ \left(\dfrac{1}{u_k}\right)^2 \ \geqslant \ \left(\dfrac{1}{\tan(u_k)}\right)^2$
- **1 pt : En sommant ces** n **inégalités, on obtient :**

$$\begin{array}{ccccc}
\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(\sin(u_k))^2} & \geqslant & \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{u_k^2} & \geqslant & \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(\tan(u_k))^2} \\
\shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\
2\,n\,\dfrac{n+1}{3} & & \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\pi^2}\ \dfrac{(2n+1)^2}{k^2} & & n\,\dfrac{2n-1}{3}
\end{array}$$

*(d'après les questions **1.c)** et **2** ainsi que par définition des éléments de la famille* $(u_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$*)*

4. Établir que la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge et : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} \ = \ \dfrac{\pi^2}{6}$.

- **1 pt : d'après la question précédente :** $\dfrac{\pi^2}{3}\dfrac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} \ \leqslant \ \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} \ \leqslant \ \dfrac{\pi^2}{3}\ \dfrac{2n(n+1)}{(2n+1)^2}$
- **1 pt :** $\dfrac{\pi^2}{3}\dfrac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi^2}{6}$ **et** $\dfrac{\pi^2}{3}\ \dfrac{2n(n+1)}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi^2}{6}$
- **1 pt : par théorème d'encadrement, que la suite** $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **est convergente et qu'elle est de limite** $\dfrac{\pi^2}{6}$**.**

Méthode 2 - Utilisation des intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\ dt, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\ \cos^{2n}(t)\ dt \quad \text{et} \quad K_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}\ J_n$$

5. Calculer I_0, J_0 et K_0.

- **1 pt :** $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$
- **1 pt :** $J_0 = \dfrac{\pi^3}{24}$
- **1 pt :** $K_0 = \dfrac{\pi^3}{24}$

6. ***a)*** À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$.

- **1 pt : On procède alors par intégration par parties (IPP).**

$$\left| \begin{array}{lcllcl} u(t) & = & \cos^{2n+1}(t) & u'(t) & = & -(2n+1)\ \sin(t)\ \cos^{2n}(t) \\ v'(t) & = & \cos(t) & v(t) & = & \sin(t) \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le `SEGMENT` $[0, \frac{\pi}{2}]$.

- **1 pt :** $I_{n+1} \ = \ \Big[\sin(t)\ \cos^{2n+1}(t) \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n+1) \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\ \cos^{2n}(t)\ dt$
- **1 pt :** $I_{n+1} = (2n+1)\, I_n - (2n+1)\, I_{n+1}$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} I_0$.

- **1 pt : initialisation**
- **3 pts : hérédité**

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Démontrer la relation : $I_n = n(2n-1) J_{n-1} - 2n^2 J_n$.

- **1 pt : On procède alors par intégration par parties (IPP).**

$$\left| \begin{array}{lcllcl} u(t) & = & \cos^{2n}(t) & u'(t) & = & -(2n)\ \sin(t)\ \cos^{2n-1}(t) \\ v'(t) & = & 1 & v(t) & = & t \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le `SEGMENT` $[0, \frac{\pi}{2}]$.

- **1 pt :** $I_n = 2n \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\ \sin(t)\ \cos^{2n-1}(t)\ dt$
- **1 pt : On procède de nouveau par intégration par parties (IPP).**

$$\left| \begin{array}{lcllcl} u(t) & = & \sin(t)\ \cos^{2n-1}(t) & u'(t) & = & \cos^{2n}(t) - (2n-1)\ \sin^2(t)\ \cos^{2n-2}(t) \\ v'(t) & = & t & v(t) & = & \dfrac{t^2}{2} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le `SEGMENT` $[0, \frac{\pi}{2}]$.

- **1 pt :** $I_n = -n \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)\ dt + n\,(2n-1) \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin^2(t) \cos^{2n-2}(t)\ dt$
- **1 pt : fin du calcul**

b) En déduire : $K_{n-1} - K_n = \frac{\pi}{4n^2}$, puis : $\frac{\pi}{4} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = K_0 - K_n$.

- **1 pt :** $K_{n-1} - K_n = \dfrac{4^{n-1}\big((n-1)!\big)^2}{(2n-2)!} \left(J_{n-1} - \dfrac{4\,n^2}{2n\,(2n-1)}\ J_n \right)$
- **1 pt :** $J_{n-1} - \dfrac{4\,n^2}{2n\,(2n-1)}\ J_n = \dfrac{I_n}{n\,(2n-1)}$ **(d'après la question précédente)**
- **1 pt : par *6.b)* puis *5.* :** $K_{n-1} - K_n = \dfrac{4^{n-1}\big((n-1)!\big)^2}{n\,(2n-1)!} \times \dfrac{(2n)!}{4^n\,(n!)^2}\ I_0 = \dfrac{1}{2n^2} \times \dfrac{\pi}{2}$
- **1 pt : On somme les égalités précédentes pour j variant de 1 à n. On obtient :**
$$\sum_{j=1}^{n} (K_{j-1} - K_j) \ = \ \sum_{j=1}^{n} \frac{\pi}{4j^2}$$
- **1 pt : par télescopage** $K_0 - K_n = \dfrac{\pi}{4} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$

8. Montrer : $\forall t \in \big[0, \frac{\pi}{2}\big]$, $t \leqslant \dfrac{\pi}{2}\ \sin(t)$. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2 I_n}{8(n+1)} \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant K_n \leqslant \frac{\pi^3}{16(n+1)}$$

- **1 pt : La fonction** $\sin$ **est concave sur** $[0, \frac{\pi}{2}]$.
On en déduit que la courbe représentative de la fonction $\sin$ **est située, sur l'intervalle** $[0, \frac{\pi}{2}]$**, au dessus de sa corde d'extrémités** $\big(0, \sin(0)\big)$ **et** $\big(\frac{\pi}{2}, \sin(\frac{\pi}{2})\big)$**, c'est-à-dire sa corde d'extrémités** $(0,0)$ **et** $(\frac{\pi}{2}, 1)$**.**
- **1 pt : Cette corde est donc la droite d'équation** $y = \dfrac{2}{\pi}\ x$**.**
- **1 pt : d'après la question précédente, puis par croissance de la fonction élévation au carré sur** $\mathbb{R}_+$ **:** $0 \leqslant t^2 \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\ \sin^2(t)$
- **1 pt : comme** $\cos^{2n}(t) \geqslant 0$ **:** $0 \leqslant t^2\ \cos^{2n}(t) \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\ \sin^2(t)\ \cos^{2n}(t)$
- **1 pt : Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant** $\big(0 \leqslant \frac{\pi}{2}\big)$ **:**
$$0 \ \leqslant \ J_n \ \leqslant \ \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\ \cos^{2n}(t)\ dt$$
- **1 pt : d'après le résultat de l'intégration par parties de la question *6.a)* :** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\ \cos^{2n}(t)\ dt = \dfrac{1}{2n+1}\ I_{n+1}$
- **1 pt : d'après *6.a)* :** $\dfrac{1}{2n+1}\ I_{n+1} = \dfrac{1}{2\,(n+1)}\ I_n$
- **1 pt : comme** $\dfrac{4^n\,(n!)^2}{(2n)!} \geqslant 0$ **:**
$$0 \ \leqslant \ K_n \ \leqslant \ \frac{\pi^2}{8\,(n+1)} \times \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n)!}\ I_n$$
- **1 pt : d'après *6.b)* puis *5.* :** $\dfrac{4^n\,(n!)^2}{(2n)!}\ I_n = \dfrac{4^n\,(n!)^2}{(2n)!} \times \dfrac{(2n)!}{4^n\,(n!)^2}\ I_0 = \dfrac{\pi}{2}$

9. Déduire des résultats de cette partie que la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge et : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

- **1 pt : par théorème d'encadrement** $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = 0$
- **1 pt : d'après *7.b)* la série** $\sum \dfrac{1}{n^2}$ **converge et :** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$**.**